

Aaron Aragon Maroja

**CARACTERIZAÇÃO GEOMÉTRICA DO  
ESPAÇO MODULI DE CONEXÕES ASD DO  
FIBRADO DE HOPF QUATÉRNIO**

Vitória - Espírito Santo, Brasil

06 de Março de 2017



Aaron Aragon Maroja

# **CARACTERIZAÇÃO GEOMÉTRICA DO ESPAÇO MODULI DE CONEXÕES ASD DO FIBRADO DE HOPF QUATÉRNIO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo PPG-MAT/UFES, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática. Orientador: Profº Leonardo Meireles Câmara.

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES  
Departamento de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientador: Leonardo Meireles Câmara

Vitória - Espírito Santo, Brasil  
06 de Março de 2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)  
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

---

M354c      Maroja, Aaron Aragon, 1990-  
              Caracterização geométrica do espaço moduli de conexões  
              ASD do fibrado de Hopf quatérnio / Aaron Aragon Maroja. – 2017.  
              155 f. : il.

              Orientador: Leonardo Meireles Câmara.  
              Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade  
              Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

              1. Geometria diferencial. 2. Fibrados (Matemática). 3.  
              Instantons. 4. Teoria de Yang-Mills. I. Câmara, Leonardo  
              Meireles. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de  
              Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

---



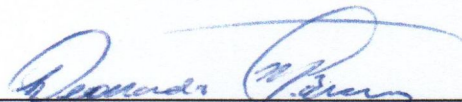
**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**  
**Centro de Ciências Exatas**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

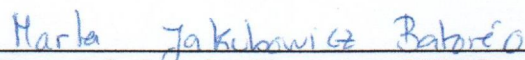
## **“Caracterização Geométrica do Espaço Moduli de Conexões ASD do Fibrado de Hopf Quatérnio”**

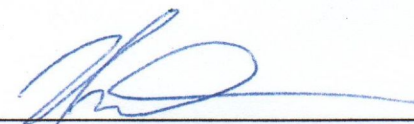
**Aaron Aragon Maroja**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 06/03/2017 por:

  
\_\_\_\_\_  
Leonardo Meireles Câmara – UFES

  
\_\_\_\_\_  
Marta Jakubowicz Batoréo – UFES

  
\_\_\_\_\_  
Henrique Bursztyn – IMPA



*SENHOR, tu tens sido o nosso refúgio,  
de geração em geração.  
Ensina-nos a contar os nossos dias,  
para que alcancemos coração sábio.  
Sl.: 90:1,12*





# Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço ao meu Deus e Pai, o Senhor Jesus Cristo, pela vida e por seu infinito amor, dia após dia renovando minhas forças e minha fé a fim de permanecer nos seus caminhos, os quais são mais altos do que os meus.

Agradeço aos meus queridos pais, Paulo e Patrícia, pelo amor incondicional, pelas palavras de conforto nas horas mais difíceis, pela educação que me proporcionaram; eles são exemplos de vida para mim. Tenho muito orgulhoso de ser chamado filho deles. Agradeço ao meu irmão Eliel por ter sido paciente todo esse tempo e ter me ajudado até aqui.

Agradeço a todos que de alguma forma me ajudaram a chegar neste momento. Um agradecimento especial aos meus amigos Enéas, Bruno, Thiago e José Eduardo (Zé), os quais fizeram parte da minha jornada desde a graduação, nas discussões pré e pós-prova, nos momentos de descontração, nos tempos de PET, e cujo companheirismo e convivência foram fundamentais neste percurso.

Agradeço ao meu orientador Prof. Leonardo Câmara, pela atenção, paciência e disponibilidade a mim dispensadas durante a realização deste trabalho. Agradeço também aos professores do PPGMAT através dos quais adquiri minha formação acadêmica.

Agradeço à CAPES, pelo apoio financeiro.



# Resumo

No início dos anos 80, C.H. Taubes e K. Uhlenbeck apresentaram o fundamento analítico para as soluções das Equações de Yang-Mills, chamadas instantons, de modo a tornarem-se um objeto geométrico de grande significância nesta época. A partir deste fundamento, Simon Donaldson pôde construir uma teoria em topologia sobre variedades fechadas, orientáveis, quadridimensionais a partir da variação da métrica, assim como na Teoria de Hodge, a fim de obter resultados que dependessem apenas da variedade a ser estudada. Neste caso, pode-se obter classes de conexões, chamadas anti-auto-duais, que necessariamente satisfazem as Equações de Yang-Mills. A coleção de todas estas conexões módulo uma relação de equivalência, chamada equivalência de calibre, é chamado o espaço moduli  $\mathcal{M}$  do fibrado e seu estudo tem proporcionando muitas descobertas da estrutura de variedades quadridimensionais. É feito neste trabalho, o estudo detalhado de um exemplo particular da Teoria de Donaldson no caso do fibrado de Hopf quaternário. Obtém-se as conexões BPST instantons deste fibrado através da 1-forma de Cartan em  $Sp(2)$  e, uma vez tendo-as em mãos, escreve-se uma família de cinco parâmetros destas conexões. Através do Teorema de Atiyah, Hitchin e Singer, obtém-se que todo elemento do espaço moduli  $\mathcal{M}$  é unicamente representado por uma conexão nesta família. A partir disso, obtém-se uma realização concreta de  $\mathcal{M}$  como uma bola unitária aberta em  $\mathbb{R}^5$ . Em particular,  $\mathcal{M}$  é uma variedade de dimensão 5 com uma compactificação natural, a saber, a bola fechada unitária em  $\mathbb{R}^5$  cuja fronteira é uma cópia do espaço em estudo  $S^4$ .

**Palavras-chaves:** Espaço Moduli. Fibrado de Hopf. Teoria de Yang-Mills. Instantons.



# Abstract

In the early 80's, C.C. Taubes and K. Uhlenbeck provided the analytical foundations so that the solutions of the Yang-Mills equations, called instantons, would have a geometrical use, yet to be found in the same period. Simon Donaldson has built then a theory based on certain aspects of these solutions over 4-dimensional, oriented, closed, differentiable manifolds. In this context, one can isolate a class of connections, called anti-self-dual, that necessarily satisfy the Yang-Mills equation. The collection of all such, modulo a natural equivalence relation, namely gauge equivalence, is called the moduli space  $\mathcal{M}$  of the bundle and its study has led to astonishing insights into the structure of smooth 4-manifolds. This work is set to study in detail a particular example of Donaldson's Theory on the Hopf bundle over the 4-dimensional manifold  $S^4$ . We arrive at the BPST instantons of such bundle via the Cartan canonical 1-form on  $Sp(2)$ . Once these are in hand, we use the conformal invariance of anti-self-dual equations to write down a 5-parameter family of such connections. By making use of a theorem of Atiyah, Hitchin and Singer, we assert that every element of the moduli space  $\mathcal{M}$  is uniquely represented by a connection in this family. From this we obtain a concrete realization of  $\mathcal{M}$  as the open unit ball in  $\mathbb{R}^5$ . In particular,  $\mathcal{M}$  is a 5-dimensional manifold with a natural compactification whose boundary is a copy of the base space  $S^4$ .

**Key-words:** Moduli Space. Hopf bundle. Yang-Mills Theory. Instantons.



# Sumário

0	INTRODUÇÃO . . . . .	15
1	MOTIVAÇÃO FÍSICA . . . . .	18
1.1	Caso Complexo . . . . .	18
1.1.1	O monopolo Magnético de Dirac . . . . .	18
1.2	Caso Quatérnio . . . . .	28
1.2.1	Isospin de uma Partícula . . . . .	28
2	PRELIMINARES . . . . .	31
2.1	Aplicações e Variedades Diferenciáveis . . . . .	31
2.2	Grupos de Lie . . . . .	47
2.3	Fibrados Principais . . . . .	59
2.4	Conexões e Curvatura . . . . .	65
3	POTENCIAIS BPST INSTANTONS E SUAS INTENSIDADES DE CAMPO . . . . .	72
3.1	Cálculo dos Potenciais BPST instantons . . . . .	72
3.2	Cálculo da Intensidade de Campo dos BPST instantons . . . . .	81
4	O DUAL DE HODGE E O FUNCIONAL DE YANG-MILLS . . . . .	90
4.1	O Dual de Hodge para 2-formas em Dimensão 4 . . . . .	90
4.2	O Funcional de Yang-Mills . . . . .	100
5	DUAS DECOMPOSIÇÕES DO ESPAÇO MODULI E SUAS CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS . . . . .	107
5.1	O Espaço Moduli e a Decomposição de Iwasawa . . . . .	107
5.2	Decomposição de Cartan do Espaço Moduli $\mathcal{M}$ . . . . .	120
6	CONCLUSÃO . . . . .	131
	APÊNDICE A – NÚMEROS QUATÉRNIOS . . . . .	132
	APÊNDICE B – MAIS SOBRE FÍSICA QUÂNTICA E CAMPO DE MATÉRIA . . . . .	136
B.1	Motivação Física . . . . .	136
B.2	Fibrados Associados e Campos de Matéria . . . . .	137

	<b>APÊNDICE C – DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE YANG-MILLS</b>	<b>143</b>
<b>C.1</b>	<b>Um pouco mais de Teoria de Hodge . . . . .</b>	<b>143</b>
<b>C.2</b>	<b>Equações de Yang-Mills . . . . .</b>	<b>146</b>
<b>C.3</b>	<b>Identidade de Bianchi . . . . .</b>	<b>148</b>
	<b>APÊNDICE D – TEOREMA DE DONALDSON . . . . .</b>	<b>149</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>156</b>



## 0 Introdução

Imagine que você esteja numa sala de jogos com um amigo jogando tênis de mesa. A conversa gira em torno da mecânica Newtoniana. Você joga a bola de ping-pong para o seu amigo. Os dois concordam que, dada uma velocidade e direção de lançamento, através da segunda Lei de Newton juntamente com a fórmula de atração gravitacional da superfície da terra, você consegue calcular o deslocamento da bola, pelo menos se a resistência do ar for considerada desprezível. Mas então você pergunta ao seu amigo: “A bola estava girando enquanto viajava na sua direção?” Ele responde: “Essa pergunta nem vale.” A final de contas, a bola é perfeitamente esférica e perfeitamente branca. Como seu amigo poderia saber se a bola estava girando no ar? Além disso, isso não importa, uma vez que a trajetória da bola é determinada inteiramente pelo deslocamento de seu centro de massa e nós já calculamos isso. Qualquer “spin” interno da bola é irrelevante para o seu deslocamento pelo espaço. É claro que esse spin interno torna-se relevante em outros contextos, por exemplo, se a bola interage (colide) com outra bola de ping-pong que também está viajando pela sala. Mais ainda, se acreditarmos na conservação de momento angular, qualquer mudança no estado de spin interno da bola deveria ser considerado por alguma força sendo exercida na bola, como por exemplo suas interações com a atmosfera da sala e, até o momento, consideramos desprezíveis essas interações em nossos cálculos. Parece ser interessante, então, considerarmos um spin da bola em torno de *algum* eixo como parte de sua “estrutura interna”, não sendo relevante para o seu deslocamento no espaço, mas compreensivelmente relevante em outras situações.

A fase de uma partícula em movimento em um campo eletromagnético (e.g. um campo de um monopolo) é muito semelhante ao spin interno de nossa bola de ping-pong. Uma mudança de fase altera a função de onda de uma partícula somente por fator de módulo um e, portanto, não afeta a probabilidade da partícula ser achada em algum lugar em particular, ou seja, não afeta seu deslocamento no espaço. Entretanto, quando duas partículas interagem (por exemplo como no experimento de Aharonov-Bohm), diferenças de fase são de crucial importância no resultado. O campo de calibre (conexão), que registra as mudanças de fases na partícula ao longo de vários caminhos através do campo eletromagnético, é o análogo da atmosfera da sala a qual é o agente (“força”) responsável por qualquer alteração no spin interno da bola.

O atual dogma na física de partículas é que partículas elementares são diferenciadas umas das outras exatamente por essa estrutura interna. Um próton e um nêutron, por exemplo, são considerados como dois estados de uma mesma partícula, diferenciados somente pelo valor de um “número quântico interno” chamado **spin isotópico** ou **isospin**. Na ausência de campo eletromagnético, essas duas partículas são indistinguíveis. Cada aspecto do estado interno de uma partícula interna é modelado, em cada ponto do his-

tórico da partícula, por um tipo de objeto matemático (um número complexo de módulo um por isospin, etc.) e um grupo cujos elementos transformam um estado em outro ( $U(1)$  para a fase e, para o isospin, o grupo  $SU(2)$  de matrizes unitárias complexas  $2 \times 2$  com determinante um). Um fibrado é construído de forma a registrar o estado interno da partícula (geralmente sobre uma variedade diferenciável de dimensão 4 que possa acomodar o “histórico” da partícula). Finalmente, conexões no fibrado são estudadas como modelos desses fenômenos físicos que podem medir as mudanças do estado interno. Claro que nem todas as conexões são de interesse físico, assim como nem todas 1-formas representam potenciais eletromagnéticos de maneira realística. As de interesse são as que satisfazem um conjunto de equações diferenciais chamadas **equações de Yang-Mills**, desenvolvidas por Chen Ning Yang e Robert Mills em [YM54] como uma generalização não linear das equações de Maxwell.

Do ponto de vista matemático, principalmente topológico, o estudo dos objetos mencionados são de grande relevância, especialmente em dimensão 4. Para fibrados definidos sobre variedades Riemanniannas, orientadas, fechadas de dimensão 4 (como por exemplo a 4-esfera  $S^4$ ), pode-se isolar uma classe de conexões, chamada de classe **(anti-)auto-dual**, que necessariamente satisfaz as equações de Yang-Mills. O conjunto de todas essas classes quando passada o módulo por uma relação de equivalência natural (equivalência de calibre), é chamado **espaço moduli**  $\mathcal{M}$  do fibrado e seu estudo (iniciado por Simon Donaldson) tem trazido descobertas impressionantes no campo de variedades de dimensão 4. Escolhemos estudar neste trabalho um exemplo que apresenta muitas características do trabalho de Donaldson em [Don83], o qual damos um resumo no seguinte parágrafo.

A estrutura do fibrado de Hopf está intimamente ligada às propriedades dos números complexos. O espaço base  $S^2$  é o plano complexo estendido, a fibra  $S^1$  consiste dos números complexos unitários e o espaço total  $S^3$  pode ser visto como aqueles pares de números complexos em  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$  cujos módulos ao quadrado são iguais a 1. Vamos mostrar que, como em  $\mathbb{R}^2$ , o espaço Euclidiano quadridimensional  $\mathbb{R}^4$  admite uma estrutura multiplicativa, faltando somente a comutatividade dentre as propriedades desejadas da multiplicação complexa. Esta estrutura quatérnia familiar em  $\mathbb{R}^4$  permite a construção de um análogo do fibrado de Hopf sobre  $S^4$  (a compactificação por 1 ponto de  $\mathbb{R}^4$ ) com fibra  $S^3$  (homeomorfa a  $SU(2)$ ) e espaço total  $S^7 \subseteq \mathbb{R}^8$ . Ambos fibrados de Hopf, complexo e quatérnio, admitem conexões naturais, sendo o primeiro aquele associado com o monopolo de Dirac de força fraca. Nosso interesse, entretanto, se encontra no último o qual, quando escrito em termos de trivializações naturais do fibrado, produz as chamadas soluções instantons das equações de Yang-Mills descobertas inicialmente por Belavin, Polyakov, Schwartz e Tyupkin [BPST75].

Os instantons BPST foram originalmente chamados de pseudopartículas e não foram vistas como expressões em coordenadas de uma conexão definida globalmente em um fibrado. Na verdade, nada se encontra de fibrado no trabalho de [BPST75], cuja perspec-

tiva estava voltada mais para a tradicional visão física-matemática: Dado um conjunto de equações diferenciais em  $\mathbb{R}^4$  (as de Yang-Mills) de um objeto de interesse (um potencial de calibre  $SU(2)$ ) tem-se como objetivo achar soluções que satisfazem certas condições assintóticas físicas desejáveis. Somente algum tempo depois ficou conhecido que estas condições assintóticas são suficientes para garantir a existência de uma extensão suave das soluções ao “ponto no infinito”, ou seja, a  $S^4$ . Mais precisamente, esse memorável *Teorema das Singularidades Removíveis* de K. Uhlenbeck [Uhl82] garante que, para qualquer potencial de Yang-Mills em  $\mathbb{R}^4$  de “ação finita” (i.e. de uma força/curvatura total do campo finito, calculado como uma integral em  $\mathbb{R}^4$ ) existe um  $SU(2)$ -fibrado principal sobre  $S^4$  e uma conexão no fibrado que quando escrito em termos de alguma trivialização do fibrado é exatamente aquele potencial dado. Além disso, o comportamento assintótico do potencial quando  $\|x\| \rightarrow \infty$  é que determina o fibrado no qual essa conexão é definida de modo que as condições assintóticas (boundary) estão diretamente codificadas na topologia. Veremos que o comportamento das soluções encontradas no artigo [BPST75] dita o fibrado de Hopf quaternio.

Chegaremos às conexões dos instantons BPST por uma rota diferente (através da 1-forma canônica de Cartan em  $Sp(2)$ ). Uma vez que as tivermos em mãos, será uma questão de usar as propriedades das equações próprias (anti)-duais que satisfazem (“invariância conforme”) a fim de escrevermos uma família de 5 parâmetros dessas conexões. Um teorema profundo de Atiyah, Hitchin e Singer [AHS78], assegura que todo elemento do espaço Moduli  $\mathcal{M}$  é unicamente determinado por uma conexão nesta família de 5 parâmetros. Disso obtemos uma completa realização de  $\mathcal{M}$  como uma bola unitária em  $\mathbb{R}^5$ . Em particular,  $\mathcal{M}$  é uma variedade 5-dimensional com uma compactificação natural (a bola fechada em  $\mathbb{R}^5$ ) cuja fronteira é uma cópia do espaço base  $S^4$ . Donaldson mostrou que muitos aspectos desse simples exemplo são preservados em um contexto muito mais geral.

# 1 Motivação Física

O objetivo desse capítulo inicial é mostrar a origem física e geométrica do termo “campo de calibre”, que para os matemáticos é conhecido como “conexão em um fibrado principal”, assim como expor a ideia principal deste trabalho. A princípio não seremos muito rigorosos, o foco será principalmente expor as ideias de maneira preliminarmente superficial, posteriormente entraremos com as definições precisas dos termos usados assim como as demonstrações mais interessantes. Seguimos como referência [Nab10] e [Nab11] neste capítulo.

## 1.1 Caso Complexo

### 1.1.1 O monopolo Magnético de Dirac

Consideremos uma partícula eletricamente carregada  $q$  e estática situada na origem de um referencial inercial e recordemos da Lei de Coulomb que esta carga determina um campo elétrico  $\vec{E}$  dado por  $\vec{E} = \frac{q}{\rho^2} \hat{e}_\rho$ , com  $\rho \neq 0$  (aqui usaremos coordenadas esféricas  $(\rho, \phi, \theta)$ , onde os vetores unitários são denotados por  $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi$  e  $\hat{e}_\theta$ ). O campo magnético  $\vec{B}$  associado a  $q$  é identicamente zero nesse referencial, i.e,  $\vec{B} = 0, \rho \neq 0$ . Em  $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$ ,  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  satisfazem as chamadas **equações de Maxwell**

$$\operatorname{div} \vec{E} = \vec{0} \quad \operatorname{div} \vec{B} = \vec{0} \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = 0 \quad (1.1.1)$$

lembrando que neste caso não temos matéria, ou seja, a densidade da carga e a corrente elétrica são nulas.

Hipoteticamente, consideremos uma partícula em descanso sobre a origem de um referencial que determina um campo eletromagnético descrito naquele referencial por

$$\vec{E} = \vec{0}, \quad \vec{B} = \frac{g}{\rho^2} \hat{e}_\rho, \quad \rho \neq 0 \quad (1.1.2)$$

onde  $g$  é uma constante (a intensidade do chamado **monopolo magnético**). Ora,  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  também satisfazem as equações de Maxwell no caso estático e sem matéria (1.1.1). Em particular,

$$\operatorname{div} \vec{B} = \vec{0} \text{ em } \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\} \quad (1.1.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{0} \text{ em } \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\} \quad (1.1.4)$$

Sabemos que  $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$  é simplesmente conexo, de (1.1.4) e resultados já conhecidos de análise podemos garantir a existência de uma função potencial escalar para  $\vec{B}$ , ou seja,

existe uma função suave  $V : \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$  cujo gradiente é exatamente  $\vec{B}$ , em  $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$ . De fato, tomando  $V(\rho, \phi, \theta) = -\frac{g}{\rho}$  segue que

$$\text{grad } V(\rho, \phi, \theta) = \left(0, 0, \frac{g}{\rho^2}\right) = \vec{B}$$

Nesse caso do campo magnético estamos interessados na existência de um potencial vetorial, ou seja, queremos encontrar um campo vetorial  $\vec{A}$  tal que  $\text{rot} \vec{A} = \vec{B}$ . Primeiro devemos deixar claro porque estaríamos interessados em tal potencial. Para isso, consideraremos um sistema um pouco mais complicado do que um monopolo isolado.

Novamente tenhamos em perspectiva um monopolo situado na origem de algum referencial inercial. Agora introduzimos na vizinhança do monopolo uma partícula eletricamente carregada  $q$  (aqui consideramos que o campo eletromagnético de  $q$  tenha um efeito desprezível sobre o monopolo). De maneira clássica, em geral, o movimento da partícula é determinada pela Segunda Lei de Newton e pela conhecida Lei de Força de Lorentz (que descreve como a partícula responde ao campo  $\vec{B}$ ).

Aqui, a visão desse sistema é diferente. A partícula não é vista simplesmente como um ponto, e sim, como um objeto da mecânica quântica cuja descrição é dada por sua função de onda  $\psi(x, y, z, t)$ . Esta é uma função complexa em função do espaço  $(x, y, z)$  e do tempo  $(t)$  no qual toda informação física mensurável se encontra. Por exemplo, a probabilidade desta partícula ser encontrada em uma determinada região  $R$  do espaço em um dado instante  $t$  é dada através da integração de  $|\psi|^2 = \psi\bar{\psi}$  sobre  $R$ . A função  $\psi$  para  $q$  é encontrada através da solução da chamada equação de Schrödinger para o sistema monopolo-partícula. A equação de Schrödinger por sua vez é construída a partir do Hamiltoniano do sistema e empregando as chamadas “regras de correspondência”, as quais substituem cada quantidade física clássica (energia, momento,...) no Hamiltoniano pelo operador apropriado  $(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar\text{grad}, \dots)$ . O que importa para nós aqui é que o Hamiltoniano de uma partícula em um campo eletromagnético envolve, de modo essencial, o vetor potencial  $\vec{A}$  do campo eletromagnético. Claro, esse potencial não é único. Substituindo  $\vec{A}$  por  $\vec{A} + \text{grad } \Omega$  na equação de Schrödinger a solução  $\psi$  é substituída por  $e^{iq\Omega}\psi$ :

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \text{grad } \Omega \implies \psi \rightarrow e^{iq\Omega}\psi \quad (1.1.5)$$

Como  $\Omega$  é uma função real então cada  $e^{iq\Omega}$  é um número complexo de módulo 1. Portanto,  $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \text{grad } \Omega$  muda somente a fase e não o módulo (amplitude) da função de onda  $\psi$ . Por um tempo pensou-se que tais mudanças de fase na função de onda não tivessem significado físico algum uma vez que todas as quantidades físicas mensuráveis associadas à partícula  $q$  dependem somente de  $|\psi|^2$  o qual é o mesmo para  $\psi$  e  $e^{iq\Omega}\psi$ . Entretanto, em 1959, Aharonov e Bohm [AB59] sugeriram que, embora não se possa medir a fase de uma única partícula, a fase “relativa” de duas partículas eletricamente carregadas que interagem entre si deveria possuir consequências a serem observadas. Eles propuseram um

experimento que descrevemos agora (Figura 1.1): Um feixe de elétrons é dividido em dois feixes parciais que passam em torno de lados opostos de um solenóide. Após o solenóide os feixes encontram-se novamente e são detectados em uma tela. O resultado é um padrão de interferência típica que se manifesta na forma de uma variação ponto a ponto da probabilidade de uma partícula ser detectada na tela. Primeiro observa-se esse padrão de interferência enquanto não há corrente elétrica através do solenóide, ou seja, de modo que o campo magnético no solenóide seja zero. Então novamente é feito o experimento, desta vez com a corrente elétrica ligada produzindo um campo magnético não-nulo. Como os elétrons passam em torno da bobina e o campo magnético permanece confinado dentro do solenóide qualquer mudança no padrão de interferência em ambos casos não pode ser atribuída ao campo magnético. Por outro lado, o vetor potencial geralmente é não nulo fora do solenóide mesmo que o campo magnético nessa região seja sempre zero. Conclui-se então que esse vetor potencial induz diferentes mudanças de fase nos dois feixes antes que eles se encontrem e que estas mudanças relativas de fase contribuem no padrão de interferência. Este experimento foi realizado em 1960 por R.G. Chambers e os resultados confirmaram as expectativas de Aharonov e Bohm.

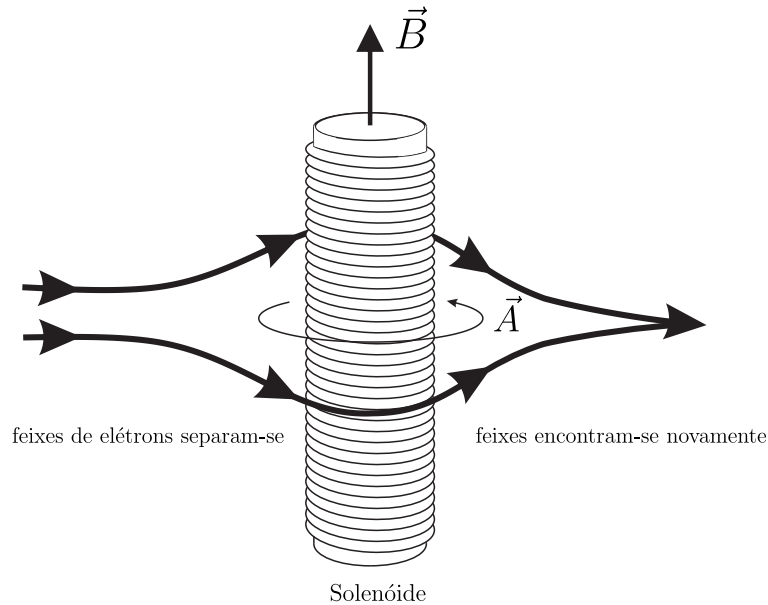


Figura 1.1 – Efeito Aharonov-Bohm.

Fonte: Elaborada pelo autor

Com isso em mente, vemos a importância de um potencial fisicamente como parte do estado interno de uma partícula. Vemos que (1.1.3) é uma condição necessária para a existência de tal potencial, entretanto afirmamos que não é suficiente, nem mesmo em uma região simplesmente conexa. Vejamos isso, supondo por contradição que exista tal campo  $\vec{A}$  suave em  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  satisfazendo  $\text{rot} \vec{A} = \vec{B}$ . Tomamos então uma esfera  $S$  de raio  $R$  em torno da origem, denotemos por  $C$  o equador dessa esfera,  $S^+$  e  $S^-$  o hemisfério

norte e sul, respectivamente. Orientemos  $C$  no sentido anti-horário e usemos em  $S, S^+$  e  $S^-$  a orientação natural dada pelo vetor unitário  $\hat{e}_\rho$ . Desse modo temos,

$$\begin{aligned}\iint_S \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} &= \iint_S \left( \frac{g}{\rho^2} \right) \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\rho dS \\ &= \frac{g}{R^2} \iint_S dS \\ &= \frac{g}{R^2} (4\pi R^2) = 4\pi g\end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Teorema de Stokes

$$\begin{aligned}\iint_S \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S^+} \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} + \iint_{S^-} \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} \\ &= \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} + \oint_{C^-} \vec{A} \cdot d\vec{r} \\ &= \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} - \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} \\ &= 0\end{aligned}$$

logo chegamos a uma contradição. Isso nos diz que não existe um potencial vetorial de  $\vec{B}$  em  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

Podemos definir localmente estes potenciais da seguinte forma. Considere o eixo- $z$  não-positivo  $Z_- = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3; z \leq 0\}$  sendo uma corda de Dirac. Assim podemos garantir a existência de um potencial vetorial no seu complemento  $U_+ = \mathbb{R}^3 - Z_-$ . De fato, considere

$$\vec{A}_+(\rho, \phi, \theta) = \frac{g}{\rho \sin \phi} (1 - \cos \phi) \hat{e}_\theta \quad (1.1.6)$$

definido em  $U_+$ , então

$$\begin{aligned}\text{rot} \vec{A}_+ &= \frac{1}{\rho^2 \sin \phi} \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \rho \hat{e}_\phi & \rho \sin \phi \hat{e}_\theta \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ 0 & 0 & g(1 - \cos \phi) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\rho^2 \sin \phi} (g \sin \phi) \hat{e}_\rho \\ &= \frac{g}{\rho^2} \hat{e}_\rho = \vec{B}\end{aligned}$$

(veja que  $A_+$  é suave em  $U_+$  porque  $(1 - \cos \phi)/\sin \phi$  é analítico em  $\phi = 0$ ). De modo inteiramente análogo temos que se  $Z_+ = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3; z \geq 0\}$  e  $U_- = \mathbb{R}^3 - Z_+$ , então

$$\vec{A}_-(\rho, \phi, \theta) = \frac{-g}{\rho \sin \phi} (1 + \cos \phi) \hat{e}_\theta \quad (1.1.7)$$

é um potencial vetorial de  $\vec{B}$  em  $U_-$ . Vemos que  $U_+$  e  $U_-$  cobrem  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , ou seja,  $\mathbb{R}^3 - \{0\} = U_+ \cup U_-$ . Percebemos que na interseção  $U_+ \cap U_-$ ,  $A_+$  e  $A_-$  devem ser diferentes pois, caso contrário, existiria um potencial vetorial global em  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , e isso

já sabemos que não existe. De fato, em  $U_+ \cap U_-$  temos  $A_+ - A_- = \frac{g}{\rho \sin \phi} \hat{e}_\theta$ . Notemos que se  $f(\rho, \phi, \theta) = 2g\theta$  então

$$\text{grad } f(\rho, \phi, \theta) = \left(0, 0, \frac{2g}{\rho \sin \phi}\right) = \frac{2g}{\rho \sin \phi} \hat{e}_\theta$$

isso nos diz que na interseção de seus domínios  $A_+$  e  $A_-$  diferem por um gradiente

$$A_+ - A_- = \text{grad}(2g\theta) \quad (1.1.8)$$

Vejamos algo interessante que surge como consequência de (1.1.5), o que foi pela primeira vez observado por Dirac. Voltemos aos vetores potenciais  $\vec{A}_+$  e  $\vec{A}_-$  como definidos em (1.1.6) e (1.1.7) em seus respectivos domínios  $U_+$  e  $U_-$ . Denotemos por  $\psi_+$  e  $\psi_-$  as funções de onda de nossa partícula determinadas (via equações de Schrodinger) por  $\vec{A}_+$  e  $\vec{A}_-$ . Em  $U_+ \cap U_-$ , (1.1.8) nos dá  $\vec{A}_+ = \vec{A}_- + \text{grad}(2g\theta)$  então por (1.1.5)  $\psi_+ = e^{i(2g\theta)}\psi_-$ . Porém em  $U_+ \cap U_-$  ambos  $\psi_+$  e  $\psi_-$  determinam exatamente um valor complexo em cada ponto a cada instante. Portanto, para cada instante fixo  $t$ , a mudança  $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$  não altera  $\psi_+$  e  $\psi_-$ . Contudo, isso implica que  $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$  também não altera o valor de  $e^{i(2g\theta)}$ , enquanto que,

$$e^{i(2g(\theta+2\pi))} = e^{i(2g\theta)} e^{i(4g\pi)}$$

Consequentemente, temos que  $e^{i(4g\pi)} = 1$ . Ora, sabemos que  $e^{i(4g\pi)} = \cos(4g\pi) + i \sin(4g\pi)$  logo isto só é possível se  $4g\pi = 2n\pi$  para algum inteiro  $n$ . Concluimos que

$$g = \frac{1}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.1.9)$$

Essa é a conhecida **condição de quantização de Dirac** e diz que mesmo se existisse um único monopolo (intensidade  $g$ ), então uma partícula deve ser “quantizada”, ou seja, aparece apenas em múltiplos inteiros de alguma quantidade elementar de uma partícula eletricamente carregada ( $q = \frac{1}{2}n$ ).

O fato de não existir um potencial vetorial global de  $\vec{B}$  em  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  (em particular, em  $S^2$ ) torna-se um obstáculo quando o problema é registrar a mudança de fase de uma partícula em um monopolo magnético, ao longo de um determinado caminho percorrido pela partícula. Entretanto, é possível achar potenciais locais, e isto é feito através de um processo de “levantamento de caminhos” por meio de um objeto na matemática chamado “conexão de um fibrado principal”. Uma vez tendo em mãos esta conexão, é feito o pull-back desta por “seções transversais” do fibrado escolhido de modo que os resultados são justamente potenciais locais que satisfazem (1.1.1).

Para entendermos de maneira mais geométrica o que é esta conexão precisamos de um fibrado principal (existem diversas formas de construir fibrados sobre a esfera  $S^2$ ). No caso do monopolo magnético de intensidade  $g = 1/2$  (as intensidades são quantizadas), este é o fibrado de Hopf complexo denotado por  $S^1 \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{\mathcal{P}} S^2$ . Esta construção está



feita no exemplo #3 da seção 1.3 do Capítulo 1. Chama-se  $S^2$  o “espaço base” do fibrado,  $S^3$  o “espaço total”, que fisicamente é visto como um “espaço de fases” e  $\mathcal{P}$  é projeção do fibrado, que por sua vez está relacionado às mencionadas seções transversais do fibrado  $s : U \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(U)$  através de  $\mathcal{P} \circ s = id_{S^2}$ . A nível de visualização, dado um caminho de  $x_0$  a  $x_1$  o que uma conexão faz é dado pelo Teorema 2.4.1 e mostramos na Figura 2.2

A fim de enxergarmos isso para o caso do monopolo magnético vamos apresentar uma maneira geométrica de ver os elementos do fibrado de Hopf complexo.

Denotando a norma usual de  $\mathbb{R}^3$  por  $\| \cdot \|$ , a esfera  $S^2$  é o subconjunto  $S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3; \|p\| = (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 = 1\}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Vamos usar aqui duas aplicações de projeção estereográfica em  $S^2$ . Seja  $U_S = S^2 - \{(0, 0, 1)\}$  a esfera  $S^2$  menos o pólo norte. Definimos  $\varphi_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^2$  por  $\varphi_S(p) = \left(\frac{p^1}{1-p^3}, \frac{p^2}{1-p^3}\right)$ . Portanto  $\varphi_S$  leva  $p$  na interseção da reta que passa por  $(0, 0, 1)$  e  $p$  com o plano(-xy) horizontal (Figura 1.2).  $\varphi_S$  é contínua, injetiva e sobrejetiva e sua inversa é dada por  $\varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow U_S$  com

$$\begin{aligned} \varphi_S^{-1}(x, y) &= \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) \\ &= \left( \frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(z\bar{z} + 1)}, \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1} \right) \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

onde na segunda igualdade identificamos  $(x, y)$  com o número complexo  $z = x + iy$ .  $\varphi_S^{-1}$  também é contínua logo  $\varphi_S$  é um “homeomorfismo”. Mais ainda,  $\varphi_S$  é na verdade um “difeomorfismo”. Identificando o plano-xy com o plano complexo  $\mathbb{C}$  podemos, de maneira natural, adicionar um “um ponto no infinito” para obtermos plano estendido complexo  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  (esse processo é chamado de “compactificação por 1 ponto”).

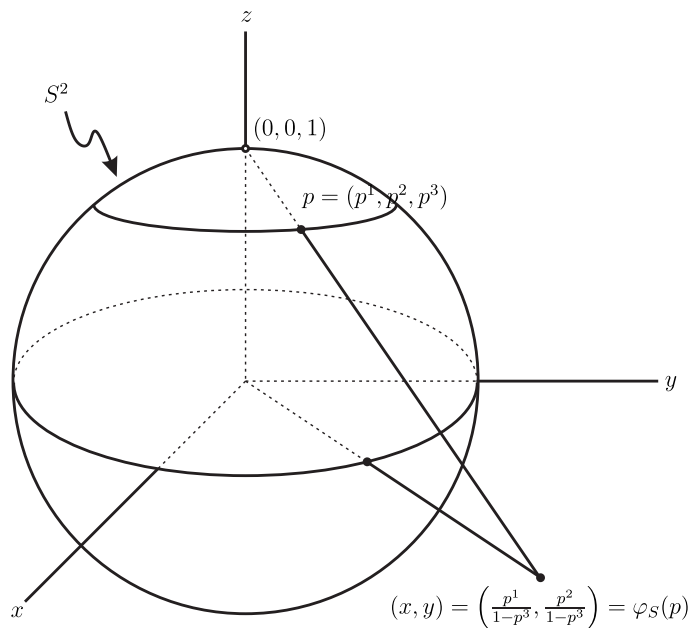


Figura 1.2 – Esfera  $S^2$  e a Projeção Estereográfica.

Fonte: Naber, 2010, pag. 11.

Podemos então estender  $\varphi_S$  de maneira natural ao homeomorfismo  $\varphi_S^* : S^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$ .

Analogamente, podemos definir uma projeção estereográfica do pólo sul de  $S^2$ . Consideramos  $U_N = S^2 - \{(0, 0, -1)\}$  e definimos  $\varphi_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$\varphi_N(p) = \left( \frac{p^1}{1+p^3}, \frac{p^2}{1+p^3} \right)$$

cujas inversas serão dadas por

$$\begin{aligned} \varphi_N^{-1}(x, y) &= \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1} \right) \\ &= \left( \frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(z\bar{z} + 1)}, \frac{1 - z\bar{z}}{z\bar{z} + 1} \right). \end{aligned}$$

As mesmas observações são feitas aqui, logo  $\varphi_N$  é um difeomorfismo. Além disso se  $p \in U_S \cap U_N$  e  $\varphi_S(p) = z = x + iy$  sabemos que  $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{y}{x^2 + y^2}$ . Mas  $x^2 + y^2 = \frac{(p^1)^2 + (p^2)^2}{(1 - p^3)^2} = \frac{1 - (p^3)^2}{(1 - p^3)^2} = \frac{1 + p^3}{1 - p^3}$  então

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 + y^2} &= \frac{p^1}{1 - p^3} \frac{1 - p^3}{1 + p^3} = \frac{p^1}{1 + p^3} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} &= \frac{p^2}{1 - p^3} \frac{1 - p^3}{1 + p^3} = \frac{p^2}{1 + p^3} \end{aligned}$$

Assim, concluímos que  $\varphi_N(p) = \frac{1}{z}$ .

Para o nosso propósito, identificamos  $\mathbb{R}^4$  com  $\mathbb{C}^2$  através da correspondência  $(x^1, y^1, x^2, y^2) \mapsto (x^1 + iy^1, x^2 + iy^2)$  e escrevemos

$$S^3 = \{(z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2; |z^1|^2 + |z^2|^2 = 1\}$$

onde  $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$  é o módulo de  $z$ . Uma parametrização de  $S^3$  que nos será útil é dada por  $z^1 = r_1 e^{i\xi_1}$  e  $z^2 = r_2 e^{i\xi_2}$ . Assim, como  $r_1^2 + r_2^2 = 1$  e ambos  $r_1$  e  $r_2$  são não-negativos, existe  $\phi$  em  $[0, \pi]$  tal que  $r_1 = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$  e  $r_2 = \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$ . Portanto,

$$S^3 = \left\{ \left( \cos \frac{\phi}{2} e^{i\xi_1}, \sin \frac{\phi}{2} e^{i\xi_2} \right); 0 \leq \frac{\phi}{2} \leq \frac{\pi}{2}, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Vamos tentar “visualizar”  $S^3$  da seguinte maneira: Primeiro, notamos que assim como  $S^2$ ,  $S^3$  pode ser vista como a compactificação por 1 ponto  $(\mathbb{R}^3)^* = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  de  $\mathbb{R}^3$  através de alguma projeção estereográfica. Agora considere o subconjunto  $T$  de  $S^3$  definido por  $T = \{(z^1, z^2) \in S^3; |z^1| = |z^2|\}$ . Logo

$$|z^1|^2 + |z^2|^2 = 1 \implies 2|z^1|^2 = 1 \implies |z^2| = |z^1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

isto nos diz que

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \left| \cos \frac{\phi}{2} e^{i\xi_1} \right| = \cos \frac{\phi}{2} \implies \frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Portanto

$$T = \left\{ \left( \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\xi_1}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\xi_2} \right); \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

e claramente isso é a cópia de um toro (um toro nada mais é do que o produto Cartesiano de dois círculos). Agora seja  $K_1 = \{(z^1, z^2) \in S^3; |z^1| \leq |z^2|\}$ . Ora,

$$|z^1| \leq |z^2| \implies \cos \frac{\phi}{2} \leq \sin \frac{\phi}{2} \implies \frac{\pi}{4} \leq \frac{\phi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

O caso em que  $\phi/2 = \pi/4$  nos diz que  $T \subseteq K_1$ . Agora se  $\phi/2 = \pi/2$  então  $z^1 = 0$  com  $z^2$  no círculo unitário o que nos dá  $\{0\} \times S^1$ , ou seja, uma cópia do círculo. Para qualquer  $\phi/2$  fixado em  $(\pi/4, \pi/2)$  temos outro toro (assim como em  $T$ ) então  $K_1$  é um toro sólido limitado por  $T$ . Enxergue isso como camadas de toros bidimensionais começando em  $T$  e reduzindo em um círculo central na medida que  $\phi/2$  cresce de  $\pi/4$  até  $\pi/2$  (Figura 1.3).

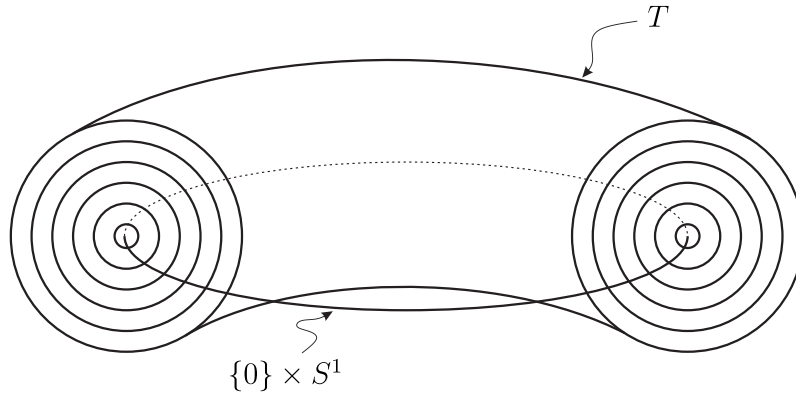


Figura 1.3 – Representação de  $K^1$ .

Fonte: Naber, 2010, pag.13

Nosso próximo passo é considerar  $K_2 = \{(z^1, z^2) \in S^3; |z^1| \geq |z^2|\}$ . Esse é o subconjunto de  $S^3$  correspondendo a  $0 \leq \phi/2 \leq \pi/4$  e como para  $K_1$ , é um toro sólido limitado superiormente por  $T$  cujas camadas são toros bidimensionais reduzindo-se ao círculo central  $S^1 \times \{0\}$ . Logo,  $S^3 = K_1 \cup K_2$  expressa  $S^3$  como a união de dois toros sólidos cuja interseção é  $T$ . A fim de colocarmos isso numa só figura começamos pelo o círculo central de  $K_1$  ( $\phi/2 = \pi/2$ ) e, na medida que  $\phi/2$  decresce de  $\pi/2$  até  $\pi/4$ , expandimos através de toros bidimensionais até chegarmos em  $T$ . Enquanto  $\phi/2$  continua decrescendo de  $\pi/4$  até 0 obtemos  $K_2$ , formado por camadas de toros e expandindo até o que parece ser uma linha reta em  $\mathbb{R}^3$ , mas na verdade é um círculo em  $S^3$  através do ponto no infinito (veja a Figura 1.4).

Seja  $p = (z^1, z^2)$  em  $S^3$  e  $g$  em  $U(1)$  (neste contexto é mais usual utilizar  $U(1)$  para denotar o círculo unitário  $S^1$ ). Observe que se definirmos

$$p \cdot g = (z^1, z^2) \cdot g = (z^1 g, z^2 g)$$

então  $p \cdot g$  também se encontra em  $S^3$ . Escrevendo tudo em coordenadas fica claro que a aplicação  $(p, g) \mapsto p \cdot g$  definida de  $S^3 \times U(1)$  em  $S^3$  é  $C^\infty$ . Além disso, se  $g_1, g_2 \in U(1)$  e

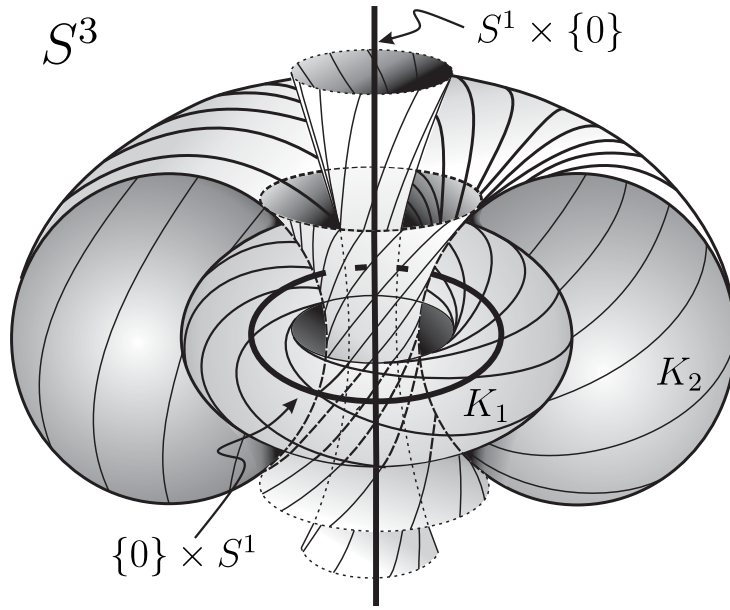


Figura 1.4 – “Visualização” de  $S^3$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

escrevendo o elemento neutro  $e^{i0}$  simplesmente por  $e$  em  $U(1)$  temos que

$$\begin{aligned}
 (p \cdot g_1) \cdot g_2 &= (z^1 g_1, z^2 g_1) \cdot g_2 = ((z^1 g_1)g_2, (z^2 g_1)g_2) \\
 &= (z^1(g_1 g_2), z^2(g_1 g_2)) = (z^1, z^2) \cdot (g_1 g_2) \\
 &= p \cdot (g_1 g_2)
 \end{aligned}$$

e  $p \cdot e = p$  para todo  $p$  em  $S^3$ . Essas propriedades qualificam a aplicação  $(p, g) \mapsto p \cdot g$  como sendo uma “ação (suave) à direita de um grupo de Lie ( $U(1)$ ) sobre a variedade ( $S^3$ )”.

A Condição de Quantização de Dirac (1.1.9) diz que, para qualquer carga  $q$  e qualquer intensidade do monopolo  $g$ , deve-se obter  $qg = (1/2)n$  para algum inteiro  $n$ . Para uma carga de unidade de força ( $q = 1$ ) temos que  $g = (1/2)n$  de modo que o menor valor positivo para  $g$  é  $g = 1/2$ . Neste caso, o potencial das 1-formas do monopolo são

$$\mathbf{A}_N = \frac{1}{2}(1 - \cos \phi)d\theta \text{ em } U_N \subseteq S^2 \quad (1.1.11)$$

$$\mathbf{A}_S = -\frac{1}{2}(1 + \cos \phi)d\theta \text{ em } U_S \subseteq S^2 \quad (1.1.12)$$

Portanto, em  $U_S \cap U_N$ ,  $\mathbf{A}_N - \mathbf{A}_S = d\theta$  então

$$\mathbf{A}_N = \mathbf{A}_S + d\theta \text{ em } U_S \cap U_N \quad (16)$$

A conexão que procuramos aparece de maneira natural como a restrição da entrada-11 da 1-forma de Cartan  $\Theta$  de  $GL(2, \mathbb{C})$  a  $SU(2)$  (ver exemplo #2 pag. 50 e #2 pag. 64). Os potenciais locais de calibre  $\mathcal{A}_N$  e  $\mathcal{A}_S$ , em coordenadas esféricas, são dados por

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_N &= -\frac{1}{2}\mathbf{i}(1 - \cos \phi)d\theta \\ \mathcal{A}_S &= \frac{1}{2}\mathbf{i}(1 + \cos \phi)d\theta\end{aligned}\tag{1.1.13}$$

Em seus respectivos domínios, a intensidade de campo de cada um dos potenciais é dada por

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} \sin \phi d\phi \wedge d\theta\tag{1.1.14}$$

(basta calcular  $d\mathcal{A}_N$  e  $d\mathcal{A}_S$ ).

A álgebra de Lie  $\text{Im}\mathbb{C}$  (aqui identificamos  $\mathfrak{u}(1)$  com esta álgebra) de  $U(1)$  é o espaço tangente ao círculo no ponto  $1 \in U(1)$ . O espaço tangente em qualquer ponto em  $U(1)$  pode ser identificado com sua “rotação” em torno do círculo pela álgebra de Lie. Agora, cada ponto  $p \in S^3$  (o espaço fibrado do fibrado de Hopf) possui uma fibra da aplicação de Hopf que passa através de  $p$ , difeomorfa a  $U(1)$ . O espaço tangente tridimensional  $T_p(S^3)$  no ponto  $p$ , consistindo de todos os vetores velocidade das curvas suaves em  $S^3$  que passam por  $p$ , possui, portanto, um subespaço isomorfo à álgebra de Lie de  $U(1)$ . Agora, assim como uma 1-forma qualquer é definida precisamente como um operador de valores reais no espaço tangente, da mesma forma fica definida a 1-forma na álgebra de Lie como um operador que leva vetores tangentes em elementos da álgebra de Lie. Logo, uma 1-forma  $\omega$  na álgebra de Lie em  $S^3$  designa para cada ponto  $p \in S^3$  uma transformação linear  $\omega_p$  de  $T_p(S^3)$  na cópia da álgebra de Lie  $\text{Im}\mathbb{C}$  dentro de  $T_p(S^3)$  (pense em  $\omega_p$  como uma espécie de “projeção”). O núcleo  $\ker \omega_p$  desta aplicação é um subespaço bidimensional de  $T_p(S^3)$  (na medida que  $p$  varia sobre  $S^3$  os núcleos  $\ker \omega_p$  determinam como um todo o que é chamado de uma “distribuição” bidimensional em  $S^3$ ). É possível mostrar que  $\mathcal{P} : S^3 \rightarrow S^2$  (ou melhor, sua derivada em  $p$ ) leva  $\ker \omega_p$ , isomorficamente, no espaço tangente  $T_{\mathcal{P}(p)}(S^2)$  no ponto  $\mathcal{P}(p)$ . Assim ao longo de uma curva suave em  $S^2$  cada vetor velocidade é levantado por um desses isomorfismos a um único vetor situado “acima” em  $S^3$ . Como todas as aplicações são suaves estes vetores levantados podem, uma vez dado uma condição inicial, ser “encaixados” em uma única curva integral que levanta a curva original em  $S^2$ .

Estas 1-formas na álgebra de Lie (ou os procedimentos de levantamento de caminho correspondente, ou as distribuições no espaço fibrado correspondente) são chamadas **conexões** no fibrado (ou, na literatura de física, **campos de calibre**). Concluimos então que o fibrado de Hopf admite uma conexão  $\omega$  cuja descrição em termos de 1-formas locais em  $S^2$  consiste precisamente dos potenciais (imaginários) do campo gerado pelo monopolo de Dirac. O procedimento de levantamento de caminho correspondente em  $S^3$  “faz o tra-

balho” dos vetores potenciais no monopolo. A derivada exterior  $\Omega = d\omega$  desta 1-forma é chamada de **curvatura** da conexão, e corresponde (através de um “pullback”) ao campo do monopolo  $-i\mathbf{F}$  em  $S^2$ . Monopolos de intensidades distintas são modelados por conexões em  $U(1)$ -fibrados sobre  $S^2$ . Temos (pelo Teorema da Classificação) que esses fibrados estão em correspondência biunívoca com os elementos do grupo fundamental  $\pi_1(U(1))$  do círculo, i.e, com os inteiros.

## 1.2 Caso Quatérnio

### 1.2.1 Isospin de uma Partícula

Em 1932, Werner Heisenberg sugeriu a possibilidade das partículas constituintes do núcleon ou núcleo atômico (próton e nêutron) serem, na verdade, a mesma partícula com diferentes “estados” e propôs uma modelagem matemática para descrevê-los chamada estado de **spin isotópico** de um núcleon. Assim como a fase de uma partícula carregada é representada por um número complexo de módulo 1 e as mudanças de fase são realizadas pela ação de  $U(1)$  em  $S^1$  (rotação), o spin isotópico de um núcleon é representado por um *par* de números complexos cuja soma dos quadrados das normas é 1 e as mudanças de spin isotópico são realizadas pela ação de  $SU(2)$  em  $S^3$ . Em 1954, C.N. Yang e R.L. Mills construíram uma teoria de spin isotópico que era estritamente análoga à teoria clássica do eletromagnetismo. Eles foram levados a considerar funções potenciais com valores matriciais (denotadas por  $B_\mu$ ) e campos correspondentes ( $F_{\mu\nu}$ ) construídos a partir das derivadas das funções potenciais. A ideia que envolve a teoria (**invariância por calibre**) foi assumir que, quando os efeitos do eletromagnetismo podem ser desprezados, as interações entre núcleons deveriam ser invariantes em relação às “rotações” arbitrárias e independentes do estado de spin isotópico em cada ponto do espaço-tempo. Isso é inteiramente análogo à invariância das interações do eletromagnetismo clássico em relação às mudanças de fase arbitrárias e tem efeito de ditar as propriedades de transformação das funções potenciais  $B_\mu$  em relação a uma mudança de calibre, sugerindo uma combinação apropriada de  $B_\mu$  e suas derivadas para agir como o campo  $F_{\mu\nu}$ , a saber,

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\mu} + i\epsilon(B_\mu B_\nu - B_\nu B_\mu). \quad (1.2.1)$$

Compare (1.2.1) com (3.2.10).

A física do spin isotópico levou Yang e Mills a proporem certas equações chamadas **equações de Yang-Mills** (ver detalhes na seção C.2 do Apêndice C)

$$d^A * \mathcal{F} = 0 \quad (1.2.2)$$

em conjunto com a **identidade de Bianchi** (ver seção C.3 do Apêndice C)

$$d^{\mathcal{A}}\mathcal{F} = 0 \quad (1.2.3)$$

as quais as funções potenciais  $B_\mu$  deveriam satisfazer. Em 1975, Belavin, Polyakov, Schwartz e Tyupkin [BPST75] encontraram um número considerável de soluções dessas equações as quais chamaram de “pseudopartículas”. Mostraremos neste trabalho que estas soluções coincidem formalmente com os pullbacks (5.1.9) (Capítulo 5) para  $\mathbb{R}^4$  das conexões no fibrado de Hopf (apenas o caso  $n = 0$  aparece explicitamente em [BPST75] o qual mostraremos ser solução das equações de Yang-Mills no Capítulo 4). Esta observação foi explicitada por Trautman [Tra77] e depois generalizada por Nowakowski e Trautman [NT78]. A grande quantidade de pesquisa feita sobre a relação da Teoria de Yang-Mills clássica (ver Apêndice B) e a geometria e topologia de conexões têm produzido, não apenas resultados belíssimos na matemática desta era, como também um profundo entendimento da estrutura das teorias físicas fundamentais. Para o leitor interessado sugerimos [FU84] e [Law85] para mais detalhes.

Os potenciais  $\mathcal{A}$  de maior interesse na física são aqueles que (localmente) minimizam o funcional de Yang-Mills (seção 2 - Capítulo 4) dado por

$$\mathcal{YM}(\mathcal{A}) = \|\mathcal{F}\|^2 = \int_{\mathbb{R}^4} \|\mathcal{F}(q)\|^2 (d\text{vol}_{\mathbb{R}^4}) \quad (1.2.4)$$

Mostraremos no Apêndice C que aplicando as técnicas de cálculo variacional para escrever as equações de Euler-Lagrange encontramos as **equações de Yang-Mills** (1.2.1) para o potencial  $\mathcal{A}$ . Em coordenadas usuais em  $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$  estas equações são dadas por

$$\sum_{\alpha=0}^3 (\partial_\alpha \mathcal{F}_{\alpha\beta} + [\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{F}_{\alpha\beta}]) = 0, \quad \beta = 0, 1, 2, 3 \quad (1.2.5)$$

onde  $\mathcal{A}_\alpha$  e  $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$  são como em (3.2.10). Este é um sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem, não-lineares das componentes  $\mathcal{A}_\alpha$  do potencial  $\mathcal{A}$ . A não linearidade das equações é vista como a representação da interação do campo de Yang-Mills consigo mesmo, algo que não ocorre na teoria clássica do eletromagnetismo (isto porque o grupo de calibre é  $U(1)$ , abeliano, então todos os colchetes de Lie são zero). Os potenciais BPST  $\mathcal{A}_{\lambda,n}$  (5.1.9) são todos soluções das equações de Yang-Mills.

Uma maneira de desenvolver a teoria quântica é fazendo uso do método do funcional integral de Feynmann que envolve a integração de  $\exp(\mathbf{i}S)$  onde  $S$  é a ação. Usando uma continuação analítica para o tempo imaginário, o espaço de Minkowski é substituído pelo espaço Euclidiano de dimensão 4, a ação Euclidiana é um múltiplo positivo de  $\mathbf{i}$  e portanto o integrando  $\exp(\mathbf{i}S)$  torna-se uma exponencial de decaimento cujo valor máximo ocorre no mínimo da ação Euclidiana. Então é de um significado importante determinar os mínimos absolutos de  $\mathcal{YM}$ . Estes mínimos, chamados **instantons**, cujo estudo é um dos objetivos principais deste trabalho, são também os que serviram de inspiração para Donaldson

apresentar uma revolução na Topologia de dimensão baixa. Os mínimos são soluções das equações de Yang-Mills, mas também podem ser caracterizados como soluções de um outro sistema de equações, mais simples, que descreveremos na seção 1 do Capítulo 4 dado por

$$*\mathcal{F} = -\mathcal{F} \quad (1.2.6)$$

Através da identidade de Bianchi vemos que  $\mathcal{F}$  é solução de (1.2.1).

De uma maneira inteiramente análoga ao caso complexo, para o estado de spin  $\frac{1}{2}$ , existe o fibrado de Hopf quaternio  $SU(2) \hookrightarrow S^7 \rightarrow S^4 \cong \mathbb{H}\mathbb{P}^1$  cuja conexão natural  $\omega$  registra, como dissemos no início dessa seção, a mudança do estado de isospin de uma partícula, dada pela ação de  $SU(2)$  sobre as fibras da esfera  $S^7$  difeomorfas a  $S^3$ . Nosso objetivo é mostrar como se dá esta construção a partir da 1-forma de Cartan  $\Theta_G$ , para  $G = GL(2, \mathbb{H})$ , a partir da qual encontraremos a conexão natural  $\omega$  do fibrado de Hopf e por meio do pullback da mesma encontramos instantons para quando  $n = 0$  e  $\lambda = 1$ . Um estudo mais a fundo é feito das conexões  $\rho_g^* \omega$ , onde  $\rho$  é uma ação natural à esquerda de  $SL(2, \mathbb{H})$  sobre  $S^7$ , em dois subgrupos particulares de  $SL(2, \mathbb{H})$  o que nos dá *todos* os BPST instantons (5.1.9) e (5.1.10). O estudo destas conexões leva à construção do que será chamado espaço moduli  $\mathcal{M}$  das conexões ASD do fibrado quaternio de Hopf, assunto principal deste trabalho.



## 2 Preliminares

Neste capítulo preliminar fizemos um resumo dos itens de geometria diferencial necessários para o desenvolvimento do curso principal deste trabalho. Como referência para este capítulo usamos, principalmente, [Nab10] e [Nab11].

### 2.1 Aplicações e Variedades Diferenciáveis

Uma **variedade topológica** de **dimensão**  $n$  é um espaço topológico  $X$  Hausdorff, segundo contável com a propriedade de que, para cada  $p \in X$ , existe um conjunto aberto  $U$  em  $X$  contendo  $p$  e um homeomorfismo  $\varphi$  de  $U$  sobre um subconjunto aberto  $\varphi(U)$  em  $\mathbb{R}^n$ . O par  $(U, \varphi)$  é dito ser uma **carta** no ponto  $p$ . Se  $(U_1, \varphi_1)$  e  $(U_2, \varphi_2)$  são duas cartas tais que  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , então as **funções de transição**  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$  e  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$  são homeomorfismos inversos.

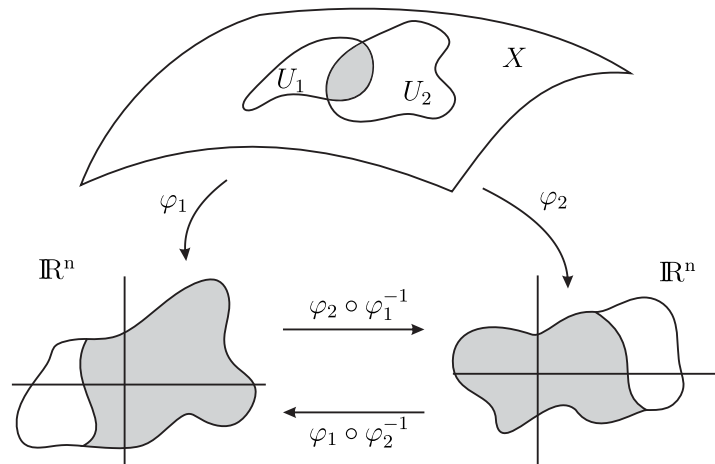


Figura 2.1 – Fonte: Elaborada pelo autor.

Duas cartas  $(U_1, \varphi_1)$  e  $(U_2, \varphi_2)$  são **compatíveis** se  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , ou  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$  e as funções de transição são  $C^\infty$ . Um **atlas** de  $X$  é uma coleção  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  de cartas duas a duas compatíveis tais que  $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = X$ . Uma carta é dita ser **admissível** em um atlas se é relacionada- $C^\infty$  com qualquer carta no atlas e o atlas é chamado **maximal** se contém todas as cartas admissíveis ao mesmo. Todo atlas está contido em um único atlas maximal (Teorema 5.3.1 [Nab10]). Um atlas maximal é chamado de **estrutura diferenciável** para  $X$ . Uma variedade topológica juntamente com uma estrutura diferenciável é chamada **variedade diferenciável** (ou **suave**). O inteiro  $n$  é chamado **dimensão** de  $X$  e é denotado por  $\dim X$ .

Sejam  $X$  e  $Y$  variedades suaves de dimensão  $n$  e  $m$ , respectivamente, e seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua. Considere  $(U, \varphi)$  uma carta em  $X$  e  $(V, \psi)$  uma carta em  $Y$  com

$U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ . Então

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(U \cap f^{-1}(V))$$

é chamada de **expressão coordenada** de  $f$  em relação a estas duas cartas.  $f$  é dita ser **suave** (ou  $C^\infty$ ) se suas expressões coordenadas são  $C^\infty$  para quaisquer cartas em algum atlas para  $X$  e  $Y$ . Uma bijeção suave com inversa suave é um **difeomorfismo** e, se existe um difeomorfismo de  $X$  sobre  $Y$ , dizemos que  $X$  e  $Y$  são **difeomorfos**.

Munindo a reta real  $\mathbb{R}$  com sua estrutura diferenciável usual (atlas com uma única carta  $(\mathbb{R}, id)$ ), denotamos por  $C^\infty(X)$  o conjunto de todas funções de valores reais suaves em  $X$  e o munimos com a estrutura algébrica natural com identidade.

Um **vetor tangente** em  $p \in X$  é uma função de valores reais  $\mathbf{v} : C^\infty(X) \rightarrow \mathbb{R}$  linear e que satisfaz a **regra do produto de Leibniz**

$$\mathbf{v}(fg) = f(p)\mathbf{v}(g) + \mathbf{v}(f)g(p), \quad \forall f, g \in C^\infty(X) \quad (2.1.1)$$

A coleção de todos vetores tangentes é denotada por  $T_p(X)$ , chamada de **espaço tangente** de  $X$  em  $p$  e munido com uma estrutura definida ponto a ponto de espaço vetorial real. A dimensão de  $T_p(X)$  visto como um espaço vetorial real é a mesma de  $X$  vista como uma variedade. De fato, se  $(U, \varphi)$  é uma carta em  $p$  de  $X$  com funções coordenadas  $x^i$ ,  $i = 1, \dots, n$  ( $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$ ), então as aplicações lineares  $\partial_i \Big|_p = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p : C^\infty(X) \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = D_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$$

estão em  $T_p(X)$  e  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$  forma uma base de  $T_p(X)$ , registramos isso no seguinte resultado.

**Teorema 2.1.1.** *Sejam  $X$  uma variedade diferenciável e  $p \in X$ . Se  $(U, \varphi)$  é uma carta em  $p$  de  $X$  com funções coordenadas  $x^i = \mathcal{P}^i \circ \varphi$ ,  $i = 1, \dots, n$ , onde  $\mathcal{P}^i$  é a projeção na  $i$ -ésima coordenada, então  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}_{i=1, \dots, n}$  é uma base de  $T_p(X)$ . Mais ainda, para cada  $\mathbf{v} \in T_p(X)$*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad (2.1.2)$$

**Observação 2.1.1.** : Em (2.1.2) fazemos uso da notação da soma de Einstein.

Se  $(a, b)$  é um intervalo aberto em  $\mathbb{R}$  munido de sua estrutura diferenciável usual (determinado pelo atlas contendo uma única carta  $((a, b), \iota)$ ,  $\iota : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  é a aplicação inclusão), então uma aplicação  $\alpha : (a, b) \rightarrow X$  é uma **curva suave** em  $X$ . Fixando

$t_0 \in (a, b)$  e fazendo  $p = \alpha(t_0)$ . O **vetor velocidade** de  $\alpha$  em  $t_0$  é a aplicação  $\alpha'(t_0) : C^\infty(X) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$(\alpha'(t_0))(f) = D_1(f \circ \alpha)(t_0), \quad \text{para cada } f \in C^\infty(X) \quad (2.1.3)$$

Então  $\alpha'(t_0)$  pertence a  $T_p(X)$  e, na verdade, todo elemento de  $T_p(X)$  é o vetor velocidade de alguma curva suave em  $X$  que passa por  $p$ , colocamos isso num resultado

**Corolário 2.1.1.** *Sejam  $X$  uma variedade suave,  $p \in X$  e  $\mathbf{v} \in T_p(X)$ . Então existe uma curva suave  $\alpha$  em  $X$ , definida sobre algum intervalo de  $\mathbb{R}$  contendo 0, tal que  $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ .*

**Demonstração.** Tome uma carta  $(U, \varphi)$  sobre  $p$  em  $X$  com funções coordenadas  $x^i = \mathcal{P}^i \circ \varphi$  e escreva  $\mathbf{v} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ , onde  $a^i(\mathbf{v}(x^i))$ . Defina uma curva suave  $\alpha$  em  $X$  em algum intervalo de  $\mathbb{R}$  contendo 0 pondo  $\alpha(t) = \varphi^{-1}(x^1(p) + ta^1 + \dots, x^n(p) + ta^n)$ . Então as componentes de  $\alpha'(0)$  com relação a  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}_{i=1, \dots, n}$  são

$$\begin{aligned} \alpha'(0)(x^i) &= D_1(x^i \circ \alpha)(0) \\ &= D_1(\mathcal{P}^i \circ \varphi \circ \varphi^{-1}(x^1(p) + ta^1 + \dots, x^n(p) + ta^n))(0) \\ &= (x^i(p) + ta^i)'(0) = a^i \end{aligned}$$

Logo  $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ . ■

Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma aplicação suave e  $p \in X$ , então a **derivada** de  $f$  em  $p$  é a aplicação linear  $f_{*p} : T_p(X) \rightarrow T_{f(p)}(Y)$  definida como segue: Para cada  $\mathbf{v} \in T_p(X)$ ,  $f_{*p}(\mathbf{v}) : C^\infty(Y) \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$(f_{*p}(\mathbf{v}))(g) = \mathbf{v}(g \circ f), \quad \forall g \in C^\infty(Y) \quad (2.1.4)$$

Se  $\mathbf{v} = \alpha'(t_0)$  para alguma curva suave  $\alpha$ , então

$$f_{*p}(\mathbf{v}) = f_{*p}(\alpha'(t_0)) = (f \circ \alpha)'(t_0) \quad (2.1.5)$$

$f$  diz-se uma **imersão em**  $p$  se  $f_{*p}$  é injetiva e uma **imersão** se isso for verdade para todo  $p \in X$ .  $f$  é uma **submersão em**  $p$  se  $f_{*p}$  é sobrejetiva e uma **submersão** se isso valer para todo  $p \in X$ . Uma imersão que também é um homeomorfismo sobre a sua imagem é chamada **mergulho**. Um ponto  $q \in Y$  é chamado **valor regular** de  $f$  se, para todo  $p \in f^{-1}(q)$ ,  $f$  é uma submersão em  $p$ . Caso contrário,  $q$  é um ponto crítico de  $f$ .

Se  $X'$  é um subespaço aberto de  $X$  em  $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  é um atlas de  $X'$  então, com a estrutura diferenciável determinada por este atlas,  $X'$  é chamado **subvariedade aberta** de  $X$ . Note que  $\dim X' = \dim X$ . Mais geralmente, se  $\dim X = n$  e  $1 \leq k \leq n$  é um número inteiro então um subespaço topológico  $X'$  de  $X$  é chamado de **subvariedade de**

**dimensão  $k$**  de  $X$ , se para cada  $p \in X'$ , existe uma carta  $(U, \varphi)$  na estrutura diferenciável de  $X$  tal que

$$\varphi(U \cap X') = \{(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) \in \varphi(U); x^{k+1} = \dots = x^n = 0\} \quad (2.1.6)$$

Para cada  $(U, \varphi)$  assim dada obtém-se uma carta  $(U \cap X', \varphi')$  para  $X'$ , onde  $\varphi'$  é  $\varphi|_{U \cap X'}$  seguida de uma projeção de  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  sobre  $\mathbb{R}^k$ . A coleção de todas as  $(U \cap X', \varphi')$  é um atlas de  $X'$  e portanto determina uma estrutura diferenciável para  $X'$ . Restrições de aplicações  $C^\infty$  em  $X$  a subvariedades são ainda  $C^\infty$  em relação à estrutura diferenciável desta subvariedade. De acordo com o Teorema da Função Inversa, se  $X$  e  $Y$  possuem a mesma dimensão e  $f : X \rightarrow Y$  é suave, então  $f_{*p} : T_p(X) \rightarrow T_{f(p)}(Y)$  é um isomorfismo se, e somente se,  $f$  é um difeomorfismo local em  $p$ . Isto é um resultado que segue do seguinte Teorema

**Teorema 2.1.2. (Regra da cadeia)** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  aplicações suaves entre variedades diferenciáveis. Então  $g \circ f : X \rightarrow Z$  é suave e para todo  $p \in X$ ,*

$$(g \circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_{*p} \quad (2.1.7)$$

**Demonstração.** Que  $g \circ f$  é suave segue de análise. Considere  $\mathbf{v} \in T_p(X)$ . Então, para todo  $h \in C^\infty(g(f(p)))$  temos que

$$\begin{aligned} (g \circ f)_{*p}(\mathbf{v})(h) &= \mathbf{v}(h \circ (g \circ f)) = \mathbf{v}((h \circ g) \circ f) \\ &= f_{*p}(\mathbf{v})(h \circ g) = g_{*f(p)}(f_{*p}(\mathbf{v}))(h) \\ &= (g_{*f(p)} \circ f_{*p})(\mathbf{v})(h) \end{aligned}$$

■

Segue deste Teorema e do Teorema da Função Inversa que:

**Corolário 2.1.2.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis e seja  $p \in X$ . Então  $f_{*p} : T_p(X) \rightarrow T_{f(p)}(Y)$  é um isomorfismo se, e somente se,  $f$  é um difeomorfismo local em  $p$ , i.e., se, e somente se, existem vizinhanças  $V$  e  $W$  de  $p$  e  $f(p)$ , respectivamente, tais que  $f|_V$  é um difeomorfismo de  $V$  sobre  $W$ .*

Se  $f$  é um mergulho, então sua imagem  $f(X)$  é uma subvariedade de  $Y$ , e considerando como uma aplicação de  $X$  em  $f(X)$ ,  $f$  é um difeomorfismo pelo Corolário 2.1.2. Por outro lado, se  $f : X \rightarrow Y$  é qualquer aplicação suave e  $q \in Y$  é um valor regular de  $f$ , então  $f^{-1}(q)$  é vazio ou é uma subvariedade de  $X$  de dimensão  $\dim X - \dim Y$  (Corolário 5.6.7 [Nab10]). Nesta altura paramos para dar alguns exemplos que serão usados neste trabalho.

1. (Estruturas diferenciáveis naturais nos espaços vetoriais) Seja  $X = \mathcal{V}$  um espaço vetorial de dimensão  $n$ . Tome uma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathcal{V}$  e considere sua base dual

$\{e^1, \dots, e^n\}$  de  $\mathcal{V}^*$ . Defina  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$  da seguinte maneira: Para cada  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^a e_a \in \mathcal{V}$ ,  $\varphi(\mathbf{v}) = (e^1(\mathbf{v}), \dots, e^n(\mathbf{v})) = (v^1, \dots, v^n)$ . Então  $\varphi$  é um isomorfismo. Munimos  $\mathcal{V}$  com a topologia que faz com que  $\varphi$  seja um homeomorfismo (processo feito independente da escolha de base). Agora tome o atlas de  $\mathcal{V}$  dado por uma única carta global  $(\mathcal{V}, \varphi)$  para munir  $\mathcal{V}$  com uma estrutura diferenciável (também independente da escolha de base). Observe que, para cada  $p \in \mathcal{V}$ , o espaço tangente  $T_p(\mathcal{V})$  pode ser identificado canonicamente com  $\mathcal{V}$ : Para cada  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ , defina  $\mathbf{v}_p \in T_p(\mathcal{V})$  pondo  $\mathbf{v}_p = \alpha'(0)$ , onde  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V}$  é dado por  $\alpha(t) = p + tv$ . Então a aplicação  $v \mapsto \mathbf{v}_p$  é o **isomorfismo canônico** de  $\mathcal{V}$  sobre  $T_p(\mathcal{V})$ .

2. (Estrutura diferenciável usual em uma esfera  $S^n$ )  $X = S^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = 1\}$  com sua topologia herdada de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Definimos duas cartas da projeção estereográfica em  $S^n$ . Sejam  $N = (0, \dots, 0, 1)$  e  $S = (0, \dots, 0, -1)$ ,  $U_S = S^n - \{N\}$  e  $U_N = S^n - \{S\}$ . Agora defina  $\varphi_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$\varphi_S(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) = \left( \frac{x^1}{1 - x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1 - x^{n+1}} \right) \quad (2.1.8)$$

e  $\varphi_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$\varphi_N(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) = \left( \frac{x^1}{1 + x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1 + x^{n+1}} \right) \quad (2.1.9)$$

Então  $\varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_S$  é

$$\varphi_S^{-1}(y) = (1 + \|y\|^2)^{-1}(2y^1, \dots, 2y^n, \|y\|^2 - 1) \quad (2.1.10)$$

e  $\varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_N$  é

$$\varphi_N^{-1}(y) = (1 + \|y\|^2)^{-1}(2y^1, \dots, 2y^n, 1 - \|y\|^2) \quad (2.1.11)$$

Portanto em  $\varphi_N(U_N \cap U_S) = \varphi_S(U_N \cap U_S) = \mathbb{R}^n - \{0\}$ ,  $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(y) = \frac{1}{\|y\|^2} y = \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(y)$ . Desse modo,  $\{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$  é um atlas de  $S^n$  e consequentemente determina uma estrutura diferenciável para  $S^n$ .

**Observação 2.1.2.** As estruturas de  $S^3$  e  $S^4$  são substancialmente elucidadas através do uso dos quatérnios. Identifica-se  $\mathbb{R}^4$  com o espaço vetorial das matrizes  $2 \times 2$  complexas da forma  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$  onde a norma ao quadrado desta matriz é tomada como sendo o determinante da mesma (ver Apêndice A). Multiplicação de matrizes corresponde à multiplicação de quatérnios em  $\mathbb{R}^4$ .  $S^3$  é o grupo dos quatérnios unitários e pode ser identificado com o grupo unitário  $SU(2)$  (Teorema A.0.1 - Apêndice A). Além disso, as funções de transição das cartas das projeções estereográficas  $(U_N, \varphi_N)$  e  $(U_S, \varphi_S)$  em  $S^4$  podem ser escritas como

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(y) = \bar{y}^{-1} = \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(y) \quad (2.1.12)$$

para todo  $v \in \mathbb{R}^4 - \{0\} = \mathbb{H} - \{0\}$ .

3. (Espaços projetivos) Seja  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ . Considere  $\mathbb{F}^n$  como um módulo à direita de  $\mathbb{F}$  (um espaço vetorial se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$ ). Seja  $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{F}^n$  e defina a forma bilinear usual  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  por  $\langle \xi, \zeta \rangle = \bar{\xi}^1 \zeta^1 + \dots + \bar{\xi}^n \zeta^n$ , para todos  $\xi, \zeta \in \mathbb{F}^n$ . Seja  $S = \{\xi \in \mathbb{F}^n : \langle \xi, \xi \rangle = 1\}$ .  $\mathbb{F}^n$  tem a topologia de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^{2n}$  ou  $\mathbb{R}^{4n}$ , então  $S$  é homeomorfo a  $S^{n-1}$ ,  $S^{2n-1}$  ou  $S^{4n-1}$ . Defina uma relação de equivalência  $\sim$  em  $S$  como segue:  $\zeta \sim \xi$  se, e somente se, existe  $a \in \mathbb{F}$  com  $|a| = 1$  tal que  $\zeta = \xi a$ . A classe de equivalência contendo  $\xi$  é

$$[\xi] = [\xi^1, \dots, \xi^n] = \{(\xi^1 a, \dots, \xi^n a) : a \in \mathbb{F}, |a| = 1\}$$

Cada  $[\xi]$  é homeomorfo a  $S^0$ ,  $S^1$  ou  $S^3$ . O espaço quociente  $S/\sim$  é o espaço projetivo (real, complexo, quaternio ou quaterniônico)  $\mathbb{FP}^{n-1}$ . Todos estes são Hausdorff ([Nab10]), segundo contáveis, sendo imagens contínuas de esferas, são também compactos e conexos.

Mostremos o homeomorfismo citado acima a  $S^3$  no caso em que  $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ . Pelo Teorema A.0.1 temos que o conjunto dos quaternios unitários, i.e., dos elementos  $a \in \mathbb{H}$  tais que  $|a| = 1$ , é homeomorfo a  $S^3$ . Afirmamos que as fibras de  $\mathcal{P} : S^{4n-1} \rightarrow \mathbb{HP}^{n-1}$  são homeomorfas a  $S^3$ . Portanto para qualquer  $q_0 = (q_0^1, \dots, q_0^n) \in S \subseteq \mathbb{H}^n$ , temos que  $\mathcal{P}^{-1}([q_0]) = \{q_0 a : a \in S^3\} = \{(q_0^1 a, \dots, q_0^n a) : a \in S^3\}$ . Fixando  $q_0 \in S$ , consideramos a aplicação  $\varphi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$  definida por  $\varphi(q^1, \dots, q^n) = (q_0^j)^{-1} q^j$ , para algum  $q_0^j \neq 0$ . Identificando  $\mathbb{H}^n$  com  $\mathbb{R}^{4n}$  e  $\mathbb{H}$  com  $\mathbb{R}^4$  temos que essa função é contínua. De fato, escrevendo  $q^k = x^k + y^k \mathbf{i} + u^k \mathbf{j} + v^k \mathbf{k}$  e  $q_0^j = \alpha + \beta \mathbf{i} + \gamma \mathbf{j} + \delta \mathbf{k}$ , onde  $k = 1, \dots, n$  e  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Logo  $\varphi$  é a composição de funções contínuas

$$(x^1, y^1, u^1, v^1, \dots, x^n, y^n, u^n, v^n) \mapsto (x^j, y^j, u^j, v^j) \mapsto \left( \frac{\alpha x^j + \beta y^j + \gamma u^j + \delta v^j}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}, \frac{\alpha y^j - \beta x^j - \gamma v^j + \delta u^j}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}, \right. \\ \left. \frac{\alpha u^j - \gamma x^j - \delta y^j + \beta v^j}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}, \frac{\alpha v^j - \delta x^j - \beta u^j + \gamma y^j}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2} \right)$$

Portanto a restrição  $\varphi|_{\mathcal{P}^{-1}([q_0])}$  que leva  $(q_0^1 a, \dots, q_0^n a)$  em  $a \in S^3$ , é contínua e obviamente bijetiva. Sua inversa  $a \mapsto (q_0^1 a, \dots, q_0^n a)$  também é contínua. De fato, escrevendo  $a = r + s \mathbf{i} + t \mathbf{j} + u \mathbf{k}$  temos que

$$(r, s, t, u) \mapsto (x_0^1 r - y_0^1 s - u_0^1 t - v_0^1 u, x_0^1 s + y_0^1 r + u_0^1 u - v_0^1 t, \\ x_0^1 t + u_0^1 r + v_0^1 s - y_0^1 u, x_0^1 u + v_0^1 r + y_0^1 t - u_0^1 s, \dots, \\ x_0^n r - y_0^n s - u_0^n t - v_0^n u, x_0^n s + y_0^n r + u_0^n u - v_0^n t, \\ x_0^n t + u_0^n r + v_0^n s - y_0^n u, x_0^n u + v_0^n r + y_0^n t - u_0^n s)$$

define uma função contínua de  $\mathbb{R}^4$  em  $\mathbb{R}^{4n}$ . Concluimos que  $(q_0^1 a, \dots, q_0^n a) \mapsto a$  é um homeomorfismo de  $\mathcal{P}^{-1}([q_0])$  sobre  $S^3$ .

Seja  $\mathcal{P} : S \rightarrow \mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1}$  a aplicação quociente ( $\mathcal{P}(\xi) = [\xi]$ ). Para cada  $k = 1, \dots, n$ , tome  $U_k = \{[\xi] \in \mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1}; \xi^k \neq 0\}$ . Então  $\mathcal{P}^{-1}(U_k) = \{\xi \in S; \xi^k \neq 0\}$ . Defina  $\varphi_k : U_k \rightarrow \mathbb{F}^{n-1} (= \mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^{2n-2}, \mathbb{R}^{4n-4})$  por

$$\varphi_k([\xi]) = \varphi_k([\xi^1, \dots, \xi^k, \dots, \xi^n]) = (\xi^1(\xi^k)^{-1}, \dots, \hat{1}, \dots, \xi^n(\xi^k)^{-1}) \quad (2.1.13)$$

(onde “ $\hat{\phantom{x}}$ ” significa omitir). Então  $\varphi_k^{-1} : \mathbb{F}^{n-1} \rightarrow U_k$  é dada por

$$\varphi_k^{-1}(y) = [y^1, \dots, 1, \dots, y^n] \quad (2.1.14)$$

Estas aplicações são homeomorfismos inversos, o que significa dizer que  $\mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1}$  é localmente Euclidiano. As funções de transição  $\varphi_k \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_k \cap U_j) \rightarrow \varphi_k(U_k \cap U_j)$  são suaves. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(y^2, y^3, \dots, y^n) &= \varphi_2([1, y^2, y^3, \dots, y^n]) \\ &= ((y^2)^{-1}, y^3(y^2)^{-1}, \dots, y^n(y^2)^{-1}) \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Logo  $\{(U_k, \varphi_k)\}_{k=1, \dots, n}$  é um atlas de  $\mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1}$  e portanto determina uma estrutura diferenciável para  $\mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1}$ .

**Observação 2.1.3.** *Temos interesse, em particular, no caso  $n = 2$ . Neste caso existem apenas duas cartas  $(U_1, \varphi_1)$  e  $(U_2, \varphi_2)$  em  $\mathbb{F}\mathbb{P}^1$ . Além disso,  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_2 \cap U_1) \rightarrow \varphi_2(U_2 \cap U_1)$  é dada por  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(y) = \varphi_2([1, y]) = y^{-1}$  e analogamente o mesmo vale para  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ . Portanto,  $\varphi_1(U_2 \cap U_1) = \varphi_2(U_2 \cap U_1) = \mathbb{F} - \{0\}$  e,*

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(y) = y^{-1} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(y), \quad y \in \mathbb{F} - \{0\} \quad (2.1.16)$$

*Fazemos um pequeno ajuste para que as funções de transição em (2.1.16) sejam semelhantes as de (2.1.12). Definimos  $\bar{\varphi}_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{F}$  por  $\bar{\varphi}_1([\xi]) = \overline{\varphi_1([\xi])}$  (em  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ,  $\bar{y} = y$ ). Então claramente  $(U_1, \bar{\varphi}_1)$  é também uma carta de  $\mathbb{F}\mathbb{P}^1$  e desta vez temos*

$$\varphi_2 \circ \bar{\varphi}_1^{-1}(y) = \bar{y}^{-1} = \bar{\varphi}_1 \circ \varphi_2^{-1}(y), \quad y \in \mathbb{F} - \{0\} \quad (2.1.17)$$

Mostraremos agora que  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \cong S^1$ ,  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \cong S^2$  e  $\mathbb{H}\mathbb{P}^1 \cong S^4$ . Primeiro enunciamos um lema.

**Lema 2.1.1. (Lema de Colagem)** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e suponha que  $X = A_1 \cup A_2$ , onde  $A_1$  e  $A_2$  são abertos (ou fechados) em  $X$ . Suponha que  $f_1 : A_1 \rightarrow Y$  e  $f_2 : A_2 \rightarrow Y$  sejam contínuas e que  $f_1|_{A_1 \cap A_2} = f_2|_{A_1 \cap A_2}$ . Então a aplicação  $f : X \rightarrow Y$  definida por*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A_1 \\ f_2(x), & x \in A_2 \end{cases}$$

*é contínua.*

Agora se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ , então  $\mathbb{FP}^1$  é homeomorfo a  $S^1, S^2$  ou  $S^4$ , respectivamente. Provemos ao mesmo tempo as três afirmações. Sejam  $(U_S, \varphi_S)$  e  $(U_N, \varphi_N)$  as cartas das projeções estereográficas sobre  $S^1, S^2$  ou  $S^4$ . Então suas aplicações de transição podem ser escritas como

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(y) = \bar{y}^{-1} = \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(y), \quad y \in \mathbb{F} - \{0\}$$

Agora sejam  $(U_1, \bar{\varphi}_1)$  e  $(U_2, \varphi_2)$  as cartas de  $\mathbb{FP}^1$  descritas acima cujas aplicações de transição são dadas por (2.2.1) e consideremos os homeomorfismos  $\varphi_S^{-1} \circ \varphi_2 : U_2 \rightarrow U_S$  e  $\varphi_N^{-1} \circ \bar{\varphi}_1 : U_1 \rightarrow U_N$ . Observe que em  $U_1 \cap U_2$ , elas coincidem, ou seja,  $\varphi_S^{-1} \circ \varphi_2 = \varphi_N^{-1} \circ \bar{\varphi}_1$ . Com efeito, se  $[\xi] \in U_1 \cap U_2$  então  $\varphi([\xi]) \in \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{F} - \{0\}$ . Mas em  $\mathbb{F} - \{0\}$ ,  $\bar{\varphi}_1 \circ \varphi_2^{-1} = \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}$ , logo

$$\begin{aligned} (\bar{\varphi}_1 \circ \varphi_2^{-1})(\varphi_2([\xi])) &= (\varphi_N \circ \varphi_S^{-1})(\varphi_2([\xi])) \\ \bar{\varphi}_1([\xi]) &= \varphi_N \circ (\varphi_S^{-1} \circ \varphi_2)([\xi]) \\ \varphi_N^{-1} \circ \bar{\varphi}_1([\xi]) &= \varphi_S^{-1} \circ \varphi_2([\xi]) \end{aligned}$$

Agora,  $U_1 \cup U_2 = \mathbb{FP}^1$  e  $U_N \cup U_S = S$ . Pelo Lema 2.1.1, os homeomorfismos  $\varphi_S^{-1} \circ \varphi_2$  e  $\varphi_N^{-1} \circ \bar{\varphi}_1$  determinam uma bijeção contínua de  $\mathbb{FP}^1$  sobre a esfera  $S$ . As inversas são determinadas da mesma forma por  $(\varphi_S^{-1} \circ \varphi_2)^{-1} = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_S : U_S \rightarrow U_2$  e  $(\varphi_N^{-1} \circ \bar{\varphi}_1)^{-1} = \varphi_1^{-1} \circ \bar{\varphi}_N : U_N \rightarrow U_1$  logo também são contínuas e segue o resultado. Mais ainda, este homeomorfismo é um difeomorfismo. Para vermos isso, escrevemos  $\varphi_S \circ \varphi_2$  mais explicitamente.

$$\begin{aligned} \varphi_S^{-1} \circ \varphi_2([\xi^1, \xi^2]) &= \varphi_S^{-1}(\xi^1(\xi^2)^{-1}) \\ &= (1 + \|\xi^1(\xi^2)^{-1}\|^2)^{-1} (2\xi^1(\xi^2)^{-1}, \|\xi^1(\xi^2)^{-1}\|^2) \\ &= \left( \frac{\|\xi^2\|^2}{\|\xi^1\|^2 + \|\xi^2\|^2} \right) \left( 2 \frac{\xi^1 \bar{\xi}^2}{\|\xi^2\|^2}, \frac{\|\xi^1\|^2}{\|\xi^2\|^2} - 1 \right) \\ &= (2\xi^1 \bar{\xi}^2, \|\xi^1\|^2 - \|\xi^2\|^2) \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

pois  $\|\xi^1\|^2 + \|\xi^2\|^2 = 1$ . Logo, cada função coordenada é suave. Fazendo o mesmo para a inversa de  $\varphi_S \circ \varphi_2$ , vemos que as funções coordenadas também são suaves e portanto  $\varphi_S \circ \varphi_2$  é um difeomorfismo. Em particular, para  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  escreve-se

$$\mathcal{P}(z^1, z^2) = (z^1 \bar{z}^2 + \bar{z}^1 z^2, -\mathbf{i} z^1 \bar{z}^2 + \mathbf{i} \bar{z}^1 z^2, |z^1|^2 - |z^2|^2) \tag{2.1.19}$$

4. (Grupos Clássicos) Seja  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$  tomamos  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$  como sendo o conjunto de todas as matrizes  $n \times n$  com entradas em  $\mathbb{F}$ . Topologicamente, identificamos  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ ,  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathbb{R}^{2n^2}$  e  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{H}) = \mathbb{R}^{4n^2}$ . Denote o conjunto de todos os elementos invertíveis de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$  por  $GL(n, \mathbb{F})$ . Então  $GL(n, \mathbb{F})$  é uma subvariedade aberta de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ . Seja  $U(n, \mathbb{F}) = \{A \in GL(n, \mathbb{F}); A^{-1} = \bar{A}^T\}$ .



$\mathbb{F} = \mathbb{R} : U(n, \mathbb{R}) = O(n) =$  grupo ortogonal de ordem  $n$

$\mathbb{F} = \mathbb{C} : U(n, \mathbb{C}) = U(n) =$  grupo unitário de ordem  $n$

$\mathbb{F} = \mathbb{H} : U(n, \mathbb{H}) = Sp(n) =$  grupo simplético de ordem  $n$

$U(n, \mathbb{F})$  é uma subvariedade de  $GL(n, \mathbb{F})$ , mas isto não é óbvio. Por exemplo,  $O(n)$  é uma subvariedade de  $GL(n, \mathbb{R})$  porque é a imagem inversa de um valor regular em relação a uma aplicação suave de  $GL(n, \mathbb{R})$  em um espaço Euclidiano (identificando o conjunto  $\mathcal{S}(n, \mathbb{R})$  das matrizes  $n \times n$  reais com  $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ ), defina  $f : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(n, \mathbb{R})$  por  $f(A) = AA^T$  e note que  $O(n) = f^{-1}(id)$ . Quanto aos casos  $U(n)$  e  $Sp(n)$  faremos uma observação na Seção 2.2. A seguir, definimos

$SO(n) = \{A \in O(n); \det A = 1\} =$  grupo ortogonal especial de ordem  $n$

$SU(n) = \{A \in U(n); \det A = 1\} =$  grupo unitário especial de ordem  $n$

$SO(n)$  e  $SU(n)$  são subvariedades de  $O(n)$  e  $U(n)$ , respectivamente.

5. (Produtos) Sejam  $X$  e  $Y$  variedades diferenciáveis de dimensão  $m$  e  $n$ , respectivamente. Se  $(U, \varphi)$  é uma carta em  $X$  e  $(V, \psi)$  uma carta em  $Y$ , então  $(U \times V, \varphi \times \psi)$  é uma carta no espaço topológico  $X \times Y$  (a aplicação produto  $\varphi \times \psi : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$  é dada por  $\varphi \times \psi(p, q) = (\varphi(p), \psi(q))$ ). O conjunto de todas as cartas deste tipo é um atlas para  $X \times Y$  que determina uma estrutura da variedade produto  $X \times Y$ . O processo estende-se para uma quantidade (finita) maior de produtos. Exemplos que saltam são  $S^1 \times S^1$ ,  $S^1 \times S^1 \times S^1, \dots$  e certos produtos de grupos clássicos como  $SU(2) \times U(1)$  (grupo de calibre do electroweak),  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  (partículas elementares do *standard model*), etc..

Um **campo vetorial** em uma variedade diferenciável  $X$  é uma aplicação  $\mathbf{V}$  que associa a cada ponto  $p \in X$  a um vetor tangente  $\mathbf{V}(p) = \mathbf{V}_p$  em  $T_p(X)$ . Se  $(U, \varphi)$  é uma carta de  $X$  com funções coordenadas  $x^1, \dots, x^n$ , então  $p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  é um campo vetorial em  $U$  para cada  $i = 1, \dots, n$ . Para qualquer  $\mathbf{V}$  e qualquer  $p \in U$ ,  $\mathbf{V}(p) = \mathbf{V}^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ , onde as funções  $V^i : U \rightarrow \mathbb{R}$  são definidas por  $V^i(p) = \mathbf{V}_p(x^i)$  e chamadas de **componente** de  $\mathbf{V}$  com relação a  $(U, \varphi)$ .  $\mathbf{V}$  é contínuo, suave, etc. se seus componentes  $V^i$  forem contínuos, suaves, etc. para todas as cartas de algum atlas para  $X$ . O conjunto de todos campos vetoriais suaves em  $X$  é denotado por  $\mathfrak{X}(X)$  e possui a estrutura óbvia como módulo sobre  $C^\infty(X)$ . Qualquer  $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}(X)$  age sobre qualquer  $f \in C^\infty(X)$  dando  $\mathbf{V}f = \mathbf{V}(f)$  em  $C^\infty(X)$  definida por  $(\mathbf{V}f)(p) = \mathbf{V}_p(f)$  para todo  $p \in X$ . Este operador em  $C^\infty(X)$  é uma derivação, i.e.,

- (i)  $\mathbf{V}(af + bg) = a\mathbf{V}f + b\mathbf{V}g$ , para todos  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $f, g \in C^\infty(X)$ , e
- (ii)  $(fg) = f\mathbf{V}g + (\mathbf{V}f)g$  para todos  $f, g \in C^\infty(X)$ .

Reciprocamente, qualquer derivação  $\mathcal{D} : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$  define um campo vetorial suave  $\mathbf{V}$  em  $X$  definido por  $\mathbf{V}(p)(f) = \mathcal{D}(f)(p)$ . Logo, campos vetoriais podem ser identificados com derivações. Como aplicação, definimos o **colchete de Lie**  $[\mathbf{V}, \mathbf{W}]$  de dois campos vetoriais suaves  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$  como sendo a derivação (o campo vetorial) definida por

$$[\mathbf{V}, \mathbf{W}](f) = \mathbf{V}(\mathbf{W}f) - \mathbf{W}(\mathbf{V}f) \quad (2.1.20)$$

Colocamos aqui algumas propriedades úteis do colchete de Lie.

$$\begin{aligned} [\mathbf{V}, \mathbf{W}] &= -[\mathbf{W}, \mathbf{V}] \\ [a_1 \mathbf{V}_1 + a_2 \mathbf{V}_2, \mathbf{W}] &= a_1 [\mathbf{V}_1, \mathbf{W}] + a_2 [\mathbf{V}_2, \mathbf{W}] \\ [f\mathbf{V}, g\mathbf{W}] &= fg[\mathbf{V}, \mathbf{W}] + f(\mathbf{V}g)\mathbf{W} - g(\mathbf{W}f)\mathbf{V} \\ [[\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2], \mathbf{V}_3] + [[\mathbf{V}_3, \mathbf{V}_1], \mathbf{V}_2] + [[\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3], \mathbf{V}_1] &= 0 \\ [\mathbf{V}, \mathbf{W}] &= \left( V^j \frac{\partial W^i}{\partial x^j} - W^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

para quaisquer  $\mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3 \in \mathfrak{X}(X)$ ,  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ,  $f, g \in C^\infty(X)$  e, par última igualdade, qualquer carta em  $X$ . Uma **curva integral** para  $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}(X)$  é uma curva  $\alpha : (a, b) \rightarrow X$  cujo vetor velocidade  $\alpha'(t_0)$  em cada ponto  $t_0$  em  $(a, b)$  coincide com o vetor  $\mathbf{V}(\alpha(t_0))$ , ou seja,  $\alpha'(t_0) = \mathbf{V}(\alpha(t_0))$ . Pelo menos localmente, estas curvas sempre existem (Teorema 5.7.2 [Nab10]).

Seja  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial de dimensão  $n$  e  $\{e_1, \dots, e_n\}$  e  $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n\}$  duas bases ordenadas de  $\mathcal{V}$ . Então existe uma única matriz  $n \times n$  não singular real  $(A_j^i)_{i,j=1,\dots,n}$  tal que  $\hat{e}_j = A_j^i e_i$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Como  $\det(A_j^i) \neq 0$  podemos definir uma relação de equivalência  $\sim$  no conjunto de todas as bases ordenadas de  $\mathcal{V}$  por  $\{e_1, \dots, e_n\} \sim \{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n\}$  se, e somente se,  $\det(A_j^i) > 0$  e com isso, concluimos que existe exatamente duas classes de equivalência, cada uma das quais tem-se uma **orientação** de  $\mathcal{V}$ . A classe de equivalência que contém  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é denotada por  $[e_1, \dots, e_n]$ . Agora seja  $X$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  e  $U$  um conjunto aberto de  $X$ . Uma **orientação** em  $U$  é uma aplicação  $\mu$  que associa a cada ponto  $p \in U$  uma orientação  $\mu_p$  de  $T_p(X)$  e satisfaz a seguinte condição de suavidade: Para cada  $p_0 \in U$  existe uma vizinhança  $W$  de  $p_0$  em  $X$  com  $W \subseteq U$  e campos vetoriais suaves  $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$  em  $W$  com  $\{\mathbf{V}_1(p), \dots, \mathbf{V}_n(p)\} \in \mu_p$  para cada  $p \in W$ . Por exemplo, se  $(U, \varphi)$  é uma carta com funções coordenadas  $x^1, \dots, x^n$ , então  $p \mapsto \left[ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right]$  é uma orientação em  $U$ . Uma variedade para a qual uma orientação existe em todo  $X$  é dito ser **orientável** e  $X$  é **orientado** para uma escolha qualquer específica de uma orientação  $\mu$  em  $X$ . Uma variedade orientável, conexa admite precisamente duas orientações (Teorema 5.10.2 [Nab10]). Se uma das orientações é  $\mu$ , então a outra é denotada por  $-\mu$  e chamada **orientação oposta**. Se  $X$  é orientável com orientação  $\mu$ , então uma carta  $(U, \varphi)$  com coordenadas  $x^1, \dots, x^n$  é dita ser **consistente com**  $\mu$  se  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\} \in \mu_p$  para cada  $p \in U$ . Se  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  são

cartas com funções coordenadas  $x^1, \dots, x^n$  e  $y^1, \dots, y^n$ , respectivamente, ambas consistentes com  $\mu$ , e para as quais  $U \cap V \neq \emptyset$ , então o Jacobiano da transformação coordenada  $(y^1, \dots, y^n) = \psi \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)$  possui determinante positivo em  $\varphi(U \cap V)$ . Segue então que uma variedade orientável possui um **atlas orientado**, i.e., um atlas cujas funções de transição possuem determinante positivo. A recíproca é verdadeira, ou seja, uma variedade é orientável se, e somente se, possui um atlas orientado (Proposição 15.6 [Lee03]). Com exceção de  $\mathbb{RP}^{n-1}$  para  $n$  ímpar, todas as variedades introduzidas nos Exemplos 1-6 acima são orientáveis. Suponha que  $X$  e  $Y$  sejam variedades com orientação  $\mu$  e  $\nu$ , respectivamente, e que  $f : X \rightarrow Y$  seja um difeomorfismo. Então, para cada  $p \in X$ ,  $f_{*p} : T_p(X) \rightarrow T_{f(p)}(Y)$  é um isomorfismo e leva cada base de  $T_p(X)$  em uma base de  $T_{f(p)}(Y)$ . Dizemos que  $f$  **preserva orientação** se, para cada  $p \in X$ ,  $f_{*p}$  leva cada base de  $\mu_p$  em uma base de  $\nu_{f(p)}$ . Se  $X$  for conexo, então um difeomorfismo  $f : X \rightarrow Y$  preserva orientação ou **reverte orientação** no sentido de que, para cada  $p \in X$ ,  $f_{*p}$  leva bases de  $\mu_p$  em bases de  $-\nu_{f(p)}$ . O dual  $T_p^*(X)$  de  $T_p(X)$  é chamado **espaço cotangente** de  $X$  em  $p$  e seus elementos são chamados **covetores** em  $p$ . Uma **1-forma (com valores reais)** em  $X$  é uma aplicação  $\Theta$  que associa cada  $p \in X$  a um covetor  $\Theta(p) = \Theta_p$  em  $T_p^*(X)$ . Por exemplo, se  $f \in C^\infty(X)$  definimos sua **derivada exterior**  $df$  seguinte forma: Para cada  $p \in X$ ,  $df(p) = df_p$  é um elemento de  $T_p^*(X)$  cujo valor em  $\mathbf{v} \in T_p(X)$  é  $df(p)(\mathbf{v}) = df_p(\mathbf{v}) = \mathbf{v}(f)$ . Então  $df$  é uma 1-forma em  $X$ . Em particular, se  $(U, \varphi)$  é uma carta em  $X$  com funções coordenadas  $x^1, \dots, x^n$  então cada  $dx^i$  é uma 1-forma em  $U$  e, em cada ponto  $p$ , o conjunto  $\{dx_p^1, \dots, dx_p^n\}$  é uma base de  $T_p^*(X)$  dual de  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$ . Se  $\Theta$  é uma 1-forma qualquer, em cada  $p \in U$ ,  $\Theta$  é escrito como  $\Theta(p) = \Theta_p = \Theta_i(p) dx_p^i$ , onde  $\Theta_i(p) = \Theta(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ . As funções  $\Theta_i$  são as componentes de  $\Theta$  em relação a  $(U, \varphi)$  e  $\Theta$  é dita contínua, suave, etc. se suas componentes  $\Theta^i$  forem contínuas, suaves, etc. para todas as cartas de algum atlas para  $X$ . O conjunto  $\mathfrak{X}^*(X)$  de todas as 1-formas suaves em  $X$  possui uma estrutura de módulo sobre  $C^\infty(X)$ . Mais ainda, qualquer  $\Theta \in \mathfrak{X}^*(X)$  dá origem a um homomorfismo módulo- $C^\infty(X)$  de  $C^\infty(X)$  definido assim: Para todo  $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}(X)$ ,  $\Theta(\mathbf{V}) = \Theta \mathbf{V}$  é dado por  $(\Theta \mathbf{V})(p) = \Theta(p) \mathbf{V}(p) = \Theta_p \mathbf{V}_p$ . Logo, em relação a qualquer carta,  $\Theta(\mathbf{V})(p) = \Theta_i(p) V^i(p)$ . Reciprocamente, qualquer homomorfismo módulo- $C^\infty(X)$   $A : \mathfrak{X}(X) \rightarrow C^\infty(X)$  determina uma única 1-forma  $\Theta$  fazendo  $\Theta(\mathbf{V}) = A(\mathbf{V})$  para todo  $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}(X)$ . Se é dado ao conjunto desses homomorfismos uma estrutura natural de módulo- $C^\infty(X)$ , então esta correspondência é um isomorfismo, dessa forma não faremos distinção entre a 1-forma e o homomorfismo. Se  $f : X \rightarrow Y$  é suave e  $\Theta$  é uma 1-forma em  $Y$ , então o **pullback**  $f^* \Theta \in \mathfrak{X}^*(X)$  é definido por

$$(f^* \Theta)_p(\mathbf{v}) = \Theta_{f(p)}(f_{*p}(\mathbf{v})) \quad (2.1.21)$$

Em coordenadas, se  $(U, \varphi)$  for uma carta em  $X$  com funções coordenadas  $x^1, \dots, x^n$  e  $(V, \psi)$  uma carta em  $Y$  com funções coordenadas  $y^1, \dots, y^n$  e se  $\varphi(U) \subseteq V$ , então  $\Theta =$

$$\Theta_i dy^i \implies$$

$$\begin{aligned} f^* \Theta &= \frac{\partial f^i}{\partial x^j} (\Theta_i \circ f) dx^j \\ &= \Theta_i (f^1(x^1, \dots, x^n), \dots, f^m(x^1, \dots, x^n)) d(f^i(x^1, \dots, x^n)) \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

onde  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n) = (f^1(x^1, \dots, x^n), \dots, f^m(x^1, \dots, x^n))$ . Em um caso especial, se  $g \in C^\infty(Y)$ , então

$$f^*(dg) = d(g \circ f) \quad (2.1.23)$$

Funções suaves de valores reais são geralmente chamadas **0-formas** e, se definido o pullback de uma 0-forma como  $f : X \rightarrow Y$  sendo  $f^*g = g \circ f \in C^\infty(X)$ , então este último resultado lê-se

$$f^*(dg) = d(f^*g) \quad (2.1.24)$$

ou seja, o pullback comuta com a derivada exterior de 0-formas. Observe que o operador da derivada exterior  $d$  leva 0-formas em 1-formas. Para referência registramos algumas de suas propriedades relevantes

$$\begin{aligned} d(af_1 + bf_2) &= adf_1 + bdf_2 & (a, b \in \mathbb{R} \text{ e } f_1, f_2 \in C^\infty(X)) \\ d(fg) &= f dg + g df & (f, g \in C^\infty(X)) \\ f^*(dg) &= d(f^*g) & (f : X \rightarrow Y, C^\infty \text{ e } g \in C^\infty(Y)) \end{aligned}$$

e, se  $(U, \varphi)$  é uma carta em  $X$  com funções coordenadas  $x^1, \dots, x^n$ , então

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \quad (f \in C^\infty(X)) \quad (2.1.25)$$

Se  $X'$  é uma subvariedade de  $X$  e  $\iota : X' \hookrightarrow X$  é a aplicação inclusão, então a **restrição** de  $\Theta \in \mathfrak{X}^*(X)$  a  $X'$  é definida como sendo  $\iota^* \Theta$ . Finalmente, se  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  são suaves, então

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \quad (2.1.26)$$

De fato, para quaisquer  $p \in X$  e  $\mathbf{v} \in T_p(X)$  temos que

$$\begin{aligned} \left( (g \circ f)^* \Theta \right)_p(\mathbf{v}) &= \Theta_{(g \circ f)(p)}((g \circ f)_* \mathbf{v}) \\ &= \Theta_{g(f(p))}(g_* \mathbf{v}) \\ &= (g^* \Theta)_{f(p)}(f_* \mathbf{v}) = (f^*(g^* \Theta))_p(\mathbf{v}) = (f^* \circ g^*)_p \Theta(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

para todo  $\Theta \in \mathfrak{X}^*(Z)$ , como queríamos.

Se  $\mathcal{V}$  é um espaço vetorial de dimensão finita, então seu dual  $\mathcal{V}^*$  geralmente é denotado por  $\mathcal{T}^1(\mathcal{V})$  e é chamado espaço de **1-tensores covariantes** em  $\mathcal{V}$ . Denotamos por  $\mathcal{T}^2(\mathcal{V})$

o conjunto de todas aplicações bilineares em  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$  e referimo-nos aos seus elementos como **2-tensores covariantes**. Se  $\alpha, \beta \in \mathcal{T}^1(\mathcal{V})$  o **produto tensorial**  $\alpha \otimes \beta \in \mathcal{T}^2(\mathcal{V})$  entre eles é definido por

$$(\alpha \otimes \beta)(v, w) = \alpha(v)\beta(w) \quad (2.1.27)$$

Se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base de  $\mathcal{V}$  e  $\{e^1, \dots, e^n\}$  é sua base dual de  $\mathcal{T}^1(\mathcal{V})$ , então  $\{e^i \otimes e^j; i, j = 1, \dots, n\}$  é uma base de  $\mathcal{T}^2(\mathcal{V})$  e cada  $A \in \mathcal{T}^2(\mathcal{V})$  pode ser escrito de forma única como

$$A = A_{ij}e^i \otimes e^j = A(e_i, e_j)e^i \otimes e^j \quad (2.1.28)$$

(Lema 5.11.1 [Nab10]). Um 2-tensor  $A \in \mathcal{T}^2(\mathcal{V})$  é dito **simétrico** se  $A(v, w) = A(w, v)$  para todos  $v, w \in \mathcal{V}$ , **antissimétrico** se  $A(v, w) = -A(w, v)$  para todos  $v, w \in \mathcal{V}$ , **não-degenerado** se  $A(v, w) = 0$  para todo  $v \in \mathcal{V}$  implica que  $w = 0$  e **não-negativo** (respectivamente, **não-positivo**) se  $A(v, w) \geq 0$  (respectivamente  $A(v, w) \leq 0$ ) para todo  $v \in \mathcal{V}$  com  $A(v, v) = 0$ , somente se  $v = 0$ . Um elemento não-degenerado, simétrico e não-negativo de  $\mathcal{T}^2(\mathcal{V})$  é chamado de **produto interno** em  $\mathcal{V}$ . O conjunto de todos os elementos antissimétricos de  $\mathcal{T}^2(\mathcal{V})$  é denotado por  $\Lambda^2(\mathcal{V})$ . Para todos  $\alpha, \beta \in \mathcal{T}^1(\mathcal{V})$  definimos o **produto exterior**  $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^2(\mathcal{V})$  por

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha \quad (2.1.29)$$

Se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base de  $\mathcal{V}$  e  $\{e^1, \dots, e^n\}$  é sua base dual, então  $\{e^i \wedge e^j; 1 \leq i < j \leq n\}$  é uma base de  $\Lambda^2(\mathcal{V})$  e cada  $\Omega \in \Lambda^2(\mathcal{V})$  pode ser escrito de forma única como

$$\Omega = \sum_{i < j} \Omega_{ij}e^i \wedge e^j = \frac{1}{2}\Omega_{ij}e^i \wedge e^j \quad (2.1.30)$$

onde  $\Omega_{ij} = \Omega(e_i, e_j)$  (Lema 5.11.2 [Nab10]).

Se  $X$  é uma variedade diferenciável, então o **2-tensor covariante** em  $X$  é a aplicação  $\mathbf{A}$  que associa cada  $p \in X$  a um elemento  $\mathbf{A}(p) = \mathbf{A}_p \in \mathcal{T}^2(T_p(X))$ . Se  $(U, \varphi)$  é uma carta em  $X$  com funções coordenadas  $x^1, \dots, x^n$ , então  $\mathbf{A}(p) = A_{ij}(p)dx^i \otimes dx^j$ . As funções  $A_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$  são definidas por  $A_{ij}(p) = \mathbf{A}_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right)$  e são as **componentes** de  $\mathbf{A}$ .  $\mathbf{A}$  é dito ser contínua, suave, etc., se suas componentes o são para todas as cartas em algum atlas em  $X$ . O conjunto de todas  $\mathbf{A}$  é denotado por  $\mathcal{T}^2(X)$  e tem estrutura módulo- $C^\infty(X)$ . Um  $\mathbf{g} \in \mathcal{T}^2(X)$ , que em cada  $p \in X$ , é um produto interno em  $T_p(X)$  é chamado de **métrica Riemanianna** de  $X$ . Um  $\Omega \in \mathcal{T}^2(X)$ , o qual em cada ponto  $p \in X$  é antissimétrico é chamado de **2-forma** em  $X$  e o conjunto de todas as 2-formas é denotado por  $\Lambda^2(X)$ . Se  $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathfrak{X}^*(X)$ , então  $\Omega_1 \otimes \Omega_2 \in \mathcal{T}^2(X)$  e  $\Omega_1 \wedge \Omega_2 \in \Lambda^2(X)$  são definidos ponto a ponto. Se  $f : X \rightarrow Y$  é suave e  $\mathbf{A} \in \mathcal{T}^2(Y)$ , então o **pullback**  $f^*\mathbf{A} \in \mathcal{T}^2(X)$  é definido, em cada  $p \in X$ , por

$$(f^*\mathbf{A})_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{A}_{f(p)}(f_{*p}(\mathbf{v}), f_{*p}(\mathbf{w})), \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(X) \quad (2.1.31)$$

O pullback de uma métrica Riemanniana continua sendo uma métrica Riemanniana, e o pullback de uma 2-forma ainda é uma 2-forma. Restrições, assim como para uma 1-formas, é o pullback pela aplicação inclusão.

Sejam  $X_1$  e  $X_2$  variedade diferenciáveis com métricas Riemannianas  $\mathbf{g}_1$  e  $\mathbf{g}_2$ , respectivamente, e suponha  $f : X_1 \rightarrow X_2$  um difeomorfismo. Dizemos que  $f$  é um **difeomorfismo conforme** (e  $X_1$  e  $X_2$  são **conformemente equivalentes**) se  $f^*\mathbf{g}_2 = \lambda\mathbf{g}_1$  para alguma função positiva suave  $\lambda : X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ . Se a função  $\lambda$  é identicamente igual a 1,  $f$  é chamado de **isometria** e  $X_1$  e  $X_2$  são **isométricos**. Daremos um exemplo usado no trabalho da esfera  $S^n$ .

Sejam  $\mathbf{g} = dx^1 \oplus dx^1 + \dots + dx^{n+1} \oplus dx^{n+1}$  a métrica usual de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\iota : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  a inclusão e  $\iota^*\mathbf{g}$  a métrica usual em  $S^n$ . Sejam  $U_S = S^n - \{(0, \dots, 0, 1)\}$  e  $\varphi_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^n$  a projeção estereográfica em relação ao pólo norte. Fazemos  $f = \varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_S$  de modo que

$$\iota \circ f(y) = (1 + \|y\|^2)^{-1}(2y^1, \dots, 2y^n, \|y\|^2 - 1)$$

onde  $y^1, \dots, y^n$  são coordenadas usuais em  $\mathbb{R}^n$ . Então  $x^i = y^i \circ \varphi_S$ ,  $i = 1, \dots, n$  são coordenadas em  $U_S$ . Calculemos agora o pullback  $f^*(\iota^*\mathbf{g}) = (\iota \circ f)^*\mathbf{g}$ . Fixe  $p \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p \in T_p(\mathbb{R}^n)$ . Então

$$((\iota \circ f)^*\mathbf{g})_p(\mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p) = \mathbf{g}_{(\iota \circ f)(p)}((\iota \circ f)_{*p}(\mathbf{v}_p), (\iota \circ f)_{*p}(\mathbf{w}_p))$$

Agora,

$$\begin{aligned} (\iota \circ f)_{*p}(\mathbf{v}_p) &= (\iota \circ f)_{*p} \left( \frac{d}{dt}(p + tv) \Big|_{t=0} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( (1 + \|p + tv\|^2)^{-1}(2p^1 + 2tv^1, \dots, 2p^n + 2tv^n, \|p + tv\|^2 - 1) \Big|_{t=0} \right) \end{aligned}$$

Calculando estas derivadas componente a componente obtemos que

$$\begin{aligned} (\iota \circ f)_{*p}(\mathbf{v}_p) &= (1 + \|p\|^2)^{-2}(2(1 + \|p\|^2)v^1 - 4\langle p, v \rangle p^1, \dots, \\ &\quad 2(1 + \|p\|^2)v^n - 4\langle p, v \rangle p^n, 4\langle p, v \rangle) \end{aligned}$$

Usando isto e uma expressão análoga para  $(\iota \circ f)_{*p}(\mathbf{w}_p)$  calcula-se  $\mathbf{g}_{(\iota \circ f)(p)}((\iota \circ f)_{*p}(\mathbf{v}_p), (\iota \circ f)_{*p}(\mathbf{w}_p))$  como a soma dos produtos das coordenadas correspondentes (assim como o produto interno em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). O resultado é  $4(1 + \|p\|^2)^{-1}\langle v, w \rangle$  e portanto obtemos

$$(f^*(\iota^*\mathbf{g}))_p(\mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p) = \frac{4}{(1 + \|p\|^2)^2} \langle v, w \rangle \quad (2.1.32)$$

Denotando por  $\mathbf{g}_{S^n}$  a métrica usual de  $S^n$  (restrita a  $U_S$ ) e por  $\mathbf{g}_{\mathbb{R}^n}$  a métrica de  $\mathbb{R}^n$  e definindo  $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\lambda(p) = \frac{4}{(1+\|p\|^2)^2}$  podemos escrever (2.1.31) da seguinte forma

$$(\varphi_S^{-1})^* \mathbf{g}_{S^n} = \lambda \mathbf{g}_{\mathbb{R}^n} \quad (2.1.33)$$

Logo,  $\varphi_S^{-1}$  é um difeomorfismo conforme de  $\mathbb{R}^n$  sobre  $U_S$ , i.e.,  $\mathbb{R}^n$  é conformemente equivalente à subvariedade aberta  $U_S$  de  $S^n$ . Cálculos semelhantes dão o mesmo resultado para  $U_N$  então dizemos que  $S^n$  é **localmente conformemente equivalente** a  $\mathbb{R}^n$ .

Um elemento  $\mathbf{A} \in \mathcal{T}^2(X)$  dá origem a uma aplicação bilinear- $C^\infty(X)$   $A : \mathfrak{X}(X) \times \mathfrak{X}(X) \rightarrow C^\infty(X)$  definida da seguinte maneira: Para todos  $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathfrak{X}(X)$  defina  $A(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \in C^\infty(X)$  por  $A(\mathbf{V}, \mathbf{W})(p) = \mathbf{A}_p(\mathbf{V}_p, \mathbf{W}_p)$ , para todo  $p \in X$ . Reciprocamente, qualquer aplicação bilinear- $C^\infty(X)$   $A : \mathfrak{X}(X) \times \mathfrak{X}(X) \rightarrow C^\infty(X)$  determina um  $\mathbf{A} \in \mathcal{T}^2(X)$  cujo valor em cada  $p \in X$  é a aplicação bilinear  $\mathbf{A}_p : T_p(X) \times T_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$  definida como segue: Para  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(X)$  selecione  $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathfrak{X}(X)$  tais que  $\mathbf{V}(p) = \mathbf{v}$  e  $\mathbf{W}(p) = \mathbf{w}$  (isso é feito tomando uma carta  $(U, \varphi)$  em  $X$  com funções coordenadas  $x^1, \dots, x^n$ , escrevendo  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ , e com isso, é possível definir um campo vetorial  $\mathbf{V}|U$  pela fórmula  $\mathbf{V}_p(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ , com  $\mathbf{V}_p(x^i) = \mathbf{v}(x^i)$  e consideramos uma função-bump  $\beta$  em  $p$  em  $U$ . Então  $\mathbf{V} = \beta \mathbf{V}|U$  estendido a zero em todo  $X$  cumpre  $\mathbf{V}(p) = \mathbf{v}$  e defina  $\mathbf{A}_p(\mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p) = \mathbf{A}(\mathbf{V}, \mathbf{W})(p)$ . Esta correspondência é injetiva e preserva as estruturas algébricas, então podemos identificar as duas noções. Em particular, se  $\Theta$  é uma 1-forma (pensada como uma aplicação de  $\mathfrak{X}(X)$  em  $C^\infty(X)$ ), definimos sua **derivada exterior**  $d\Theta \in \Lambda^2(X)$  por

$$d\Theta(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = \mathbf{V}(\Theta\mathbf{W}) - \mathbf{W}(\Theta\mathbf{V}) - \Theta([\mathbf{V}, \mathbf{W}]) \quad (2.1.34)$$

Algumas propriedades de (2.1.33) são

$$\begin{aligned} d(a\Theta_1 + b\Theta_2) &= ad\Theta_1 + bd\Theta_2 & (a, b \in \mathbb{R} \text{ e } \Theta_1, \Theta_2 \in \mathfrak{X}^*(X)) \\ d(f\Theta) &= fd\Theta + df \wedge \Theta & (f \in C^\infty(X) \text{ e } \Theta \in \mathfrak{X}^*(X)) \\ d(df) &= 0 & (f \in C^\infty(X)) \\ F^*(d\Theta) &= d(F^*\Theta) & (F : X \rightarrow Y \text{ e } \Theta \in \mathfrak{X}^*(Y)) \end{aligned}$$

e, se  $(U, \varphi)$  é uma carta em  $X$  com funções coordenadas  $x^1, \dots, x^n$ ,

$$d(\Theta_i dx^i) = d\Theta_i \wedge dx^i = \frac{\partial \Theta_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i \quad (\Theta \in \mathfrak{X}^*(X)) \quad (2.1.35)$$

Seja  $X$  uma variedade diferenciável,  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial real de dimensão finita e  $\{e_1, \dots, e_d\}$  uma base de  $\mathcal{V}$ . Uma **0-forma com valores em  $\mathcal{V}$**  em  $X$  é uma aplicação de  $X$  em  $\mathcal{V}$ . Logo, podemos escrever  $\phi = \phi^i e_i$ , onde as funções suaves  $\phi^i$  de valores reais são chamadas as componentes de  $\phi$  em relação  $\{e_1, \dots, e_d\}$ .  $\phi$  é dita ser contínua, suave, etc., se suas componentes o são em relação a alguma base (e portanto, a qualquer base) de  $\mathcal{V}$ . Uma **1-forma com valores em  $\mathcal{V}$**  em  $X$  é uma aplicação  $\omega$  que associa cada

$p \in X$  uma transformação linear  $\omega(p) = \omega_p$  de  $T_p(X)$  em  $\mathcal{V}$ . Escrevendo  $\omega = \omega^i e_i$ , onde cada  $\omega^i$  é uma 1-forma (com valores em  $\mathbb{R}$ ) usual, dizemos que  $\omega$  é contínua, suave, etc., se suas **componentes**  $\omega^1, \dots, \omega^d$  o são. Uma **2-forma com valores em  $\mathcal{V}$**  em  $X$  é uma aplicação  $\Omega$  que associa cada  $p \in X$  uma transformação bilinear  $\Omega(p) = \Omega_p : T_p(X) \times T_p(X) \rightarrow \mathcal{V}$  e pode ser escrita como  $\Omega = \Omega^i e_i$ , onde cada  $\Omega^i$  é uma 2-forma com valores em  $\mathbb{R}$ . Novamente  $\omega$  é contínua, suave, etc., se suas **componentes**  $\Omega^1, \dots, \Omega^d$  o são. Pullbacks de formas com valores em  $\mathcal{V}$  são definidos componente a componente assim como derivadas exteriores. Tudo isto é independente da escolha de base. Produtos exteriores de 1-formas com valores em  $\mathcal{V}$  não estão definidos a não ser que seja dada alguma “multiplicação” no espaço vetorial na qual as 1-formas tomem seus valores. Suponha, mais geralmente, que  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  e  $\mathcal{W}$  sejam espaços vetoriais de dimensão finita que seja dada uma aplicação bilinear  $\rho : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  (quando  $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{W}$  esta aplicação é uma “multiplicação” em  $\mathcal{V}$ ). Agora, se  $\omega$  é uma 1-forma em  $X$  com valores em  $\mathcal{U}$  e  $\eta$  uma 1-forma em  $X$  com valores em  $\mathcal{V}$ , então definimos o **produto  $\rho$ -exterior**  $\omega \wedge_\rho \eta$  de  $\omega$  e  $\eta$  por

$$(\omega \wedge_\rho \eta)_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \rho(\omega_p(\mathbf{v}), \eta_p(\mathbf{w})) - \rho(\eta_p(\mathbf{v}), \omega_p(\mathbf{w})) \quad (2.1.36)$$

para todo  $p \in X$  e todos  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(X)$ . Então este produto é uma 2-forma em  $X$  com valores em  $\mathcal{W}$ . A seguir um Lema.

**Lema 2.1.2.** *Sejam  $\{u_1, \dots, u_c\}$  e  $\{u_1, \dots, u_d\}$  bases de  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$ , respectivamente, e  $\rho : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  uma aplicação bilinear. Sejam  $\omega = \omega^i u_i$  uma 1-forma em  $X$  de valores em  $\mathcal{U}$  e  $\eta = \eta^j u_j$  uma 1-forma em  $X$  de valores em  $\mathcal{V}$ . Então*

$$\omega \wedge_\rho \eta = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^d (\omega^i \wedge \eta^j) \rho(u_i, u_j)$$

Seguem alguns exemplos do Lema 2.1.2 utilizados no trabalho.

1. Sejam  $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{W} = \text{Im}\mathbb{H}$  e tome  $\rho : \text{Im}\mathbb{H} \times \text{Im}\mathbb{H} \rightarrow \text{Im}\mathbb{H}$  como sendo o colchete de Lie  $\rho(x, y) = [x, y] = xy - yx = \text{Im}(xy)$ . Sejam  $\omega$  e  $\eta$  1-formas em  $X$  com valores em  $\text{Im}\mathbb{H}$  e tome  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  uma base de  $\text{Im}\mathbb{H}$ . Escrevendo  $\omega = \omega^1 \mathbf{i} + \omega^2 \mathbf{j} + \omega^3 \mathbf{k}$  e  $\eta = \eta^1 \mathbf{i} + \eta^2 \mathbf{j} + \eta^3 \mathbf{k}$  segue do Lema 2.1.2 que

$$\begin{aligned} \omega \wedge_\rho \eta &= (\omega^1 \wedge \eta^1)[\mathbf{i}, \mathbf{i}] + (\omega^1 \wedge \eta^2)[\mathbf{i}, \mathbf{j}] + (\omega^1 \wedge \eta^3)[\mathbf{i}, \mathbf{k}] \\ &\quad + (\omega^2 \wedge \eta^1)[\mathbf{j}, \mathbf{i}] + (\omega^2 \wedge \eta^2)[\mathbf{j}, \mathbf{j}] + (\omega^2 \wedge \eta^3)[\mathbf{j}, \mathbf{k}] \\ &\quad + (\omega^3 \wedge \eta^1)[\mathbf{k}, \mathbf{i}] + (\omega^3 \wedge \eta^2)[\mathbf{k}, \mathbf{j}] + (\omega^3 \wedge \eta^3)[\mathbf{k}, \mathbf{k}] \\ &= 4[\omega^2 \wedge \eta^3 \mathbf{i} + \omega^3 \wedge \eta^1 \mathbf{j} + \omega^1 \wedge \eta^2 \mathbf{k}] \end{aligned}$$

Quando  $\rho$  é dado pelo colchete de Lie de alguma álgebra de Lie como no exemplo acima, costuma-se escrever  $[\omega, \eta]$  no lugar de  $\omega \wedge_\rho \eta$  e utilizamos esta notação no trabalho.



2. Se  $\omega$  e  $\eta$  são 1-formas em  $X$  com valores em  $\text{Im}\mathbb{H}$  e  $\rho : \text{Im}\mathbb{H} \times \text{Im}\mathbb{H} \rightarrow \text{Im}\mathbb{H}$  é uma multiplicação quaternária  $\rho(x, y) = xy$  (veja (A.0.3)) então, escrevendo  $\omega = \omega^1 \mathbf{i} + \omega^2 \mathbf{j} + \omega^3 \mathbf{k}$  e  $\eta = \eta^1 \mathbf{i} + \eta^2 \mathbf{j} + \eta^3 \mathbf{k}$  segue do Lema 2.1.2 que

$$\begin{aligned} \omega \wedge_\rho \eta = & [\omega^0 \wedge \eta^0 - \omega^1 \wedge \eta^1 - \omega^2 \wedge \eta^2 - \omega^3 \wedge \eta^3] + \\ & [\omega^0 \wedge \eta^1 + \omega^1 \wedge \eta^0 + \omega^2 \wedge \eta^3 - \omega^3 \wedge \eta^2] \mathbf{i} + \\ & [\omega^0 \wedge \eta^2 + \omega^2 \wedge \eta^0 + \omega^3 \wedge \eta^1 - \omega^1 \wedge \eta^3] \mathbf{j} + \\ & [\omega^0 \wedge \eta^3 + \omega^3 \wedge \eta^0 + \omega^1 \wedge \eta^2 - \omega^2 \wedge \eta^1] \mathbf{k} \end{aligned}$$

Como consequência deste último exemplos temos que se escrevermos 1-formas usuais em  $\mathbb{H}$  com valores em  $\text{Im}\mathbb{H}$  como  $dq = dq^0 + dq^1 \mathbf{i} + dq^2 \mathbf{j} + dq^3 \mathbf{k}$  e  $d\bar{q} = dq^0 - dq^1 \mathbf{i} - dq^2 \mathbf{j} - dq^3 \mathbf{k}$ , então sendo  $\rho$  a multiplicação quaternária, segue que

$$\begin{aligned} dq \wedge_\rho dq &= 2(dq^2 \wedge dq^3 \mathbf{i} + dq^3 \wedge dq^1 \mathbf{j} + dq^1 \wedge dq^2 \mathbf{k}) \\ dq \wedge_\rho d\bar{q} &= -2 \left( (dq^0 \wedge dq^1 + dq^2 \wedge dq^3) \mathbf{i} + (dq^0 \wedge dq^2 - dq^1 \wedge dq^3) \mathbf{j} \right. \\ &\quad \left. + (dq^0 \wedge dq^3 + dq^1 \wedge dq^2) \mathbf{k} \right) \\ d\bar{q} \wedge_\rho dq &= 2 \left( (dq^0 \wedge dq^1 - dq^2 \wedge dq^3) \mathbf{i} + (dq^0 \wedge dq^2 + dq^1 \wedge dq^3) \mathbf{j} \right. \\ &\quad \left. + (dq^0 \wedge dq^3 - dq^1 \wedge dq^2) \mathbf{k} \right) \end{aligned} \tag{2.1.37}$$

Usaremos simplesmente  $\wedge$  no lugar de  $\wedge_\rho$  quando  $\rho$  for a multiplicação quaternária.

## 2.2 Grupos de Lie

Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável  $G$  na qual é definida uma estrutura de grupo para qual a aplicação multiplicação  $(x, y) \mapsto x \cdot y$  de  $G \times G$  em  $G$  é uma aplicação suave. As translações à esquerda e à direita  $L_g, R_g : G \rightarrow G$  definidas por  $L_g(x) = gx$  e  $R_g(x) = xg$  são difeomorfismos para cada  $g \in G$ . Os grupos de Lie de nosso interesse são:

1. Os números reais, complexos, ou quaternários não nulos com suas respectivas multiplicações.
2. O círculo  $S^1$  (visto como números complexos de módulo 1 em  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ) com multiplicação complexa.
3. A esfera  $S^3$  (vista como os quaternários unitários em  $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ ) com multiplicação quaternária.
4. Os grupos lineares gerais das matrizes  $n \times n$  invertíveis,  $GL(n, \mathbb{R}), GL(n, \mathbb{C})$  e  $GL(n, \mathbb{H})$  com multiplicação de matrizes.
5. Qualquer subgrupo  $H$  de um grupo de Lie  $G$  que também é uma subvariedade de  $G$  é um grupo de Lie, portanto, em particular, todos os grupos clássicos são grupos de Lie:

$$O(n), SO(n), U(n), SU(n), Sp(n)$$

6. Qualquer produto (finito) de grupos de Lie (com estrutura produto de variedade e a estrutura de grupo do produto direto) é um grupo de Lie, e.g.,  $SU(2) \times U(1)$ , ou qualquer tóro  $S^1 \times \dots \times S^1$ .

Dois grupos de Lie  $G_1$  e  $G_2$  são **isomorfos** se existe um difeomorfismo de  $G_1$  sobre  $G_2$  o qual também é um isomorfismo de grupo, e.g.,  $S^1$  é isomorfo a  $U(1)$  e  $SO(2)$ , enquanto  $S^3$  é isomorfo a  $SU(2)$  e  $Sp(1)$ . Qualquer subgrupo de algum  $GL(n, \mathbb{C})$  que também é uma subvariedade é chamado de **grupo de Lie de matrizes** e vamos restringir daqui em diante nossa atenção para esses grupos.  $GL(n, \mathbb{R})$  pode ser identificado com um subgrupo de  $GL(n, \mathbb{C})$  que também é uma subvariedade. É menos óbvio, mas também verdadeiro, que  $GL(n, \mathbb{H})$  pode ser identificado com um subgrupo de  $GL(2n, \mathbb{C})$  que também é uma subvariedade. Para vermos isso, primeiro observe que qualquer quatérnio  $x^0 + x^1\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}$  pode ser escrito como  $z^1 + z^2\mathbf{j}$ , onde  $z^1 = x^0 + x^1\mathbf{i}$  e  $z^2 = x^2 + x^3\mathbf{i}$ , e portanto, pode ser identificado com um par de números complexos. Logo, qualquer matriz  $n \times n$  quatérnia  $P$  pode ser escrita como  $P = A + B\mathbf{j}$ , onde  $A$  e  $B$  são matrizes  $n \times n$  complexas. Defina uma aplicação  $\phi : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{H}) \rightarrow \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C})$  por

$$\phi(P) = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \quad (2.2.1)$$

Então  $\phi$  é um isomorfismo que preserva o conjugado transposto. Em particular,  $P \in Sp(n)$  se, e somente se,  $\phi(P) \in U(2n)$ . Além disso, uma matriz  $2n \times 2n$  complexa  $M$  é da forma  $\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$  se, e somente se, satisfaz  $JMJ^{-1} = \bar{M}$ , onde  $J = \begin{pmatrix} 0 & id \\ -id & 0 \end{pmatrix}$  e, se  $M$  for unitária, isto é equivalente a  $M^T JM = J$ . Logo, podemos identificar

$$GL(n, \mathbb{H}) = \{M \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}); M \text{ é invertível e } MJM^{-1} = \bar{M}\}$$

$$Sp(n) = \{M \in U(2n); M^T JM = J\}$$

Os **grupos lineares especiais real** e **complexo**  $SL(n, \mathbb{R})$  e  $SL(n, \mathbb{C})$  são os subgrupos de  $GL(n, \mathbb{R})$  e  $GL(n, \mathbb{C})$ , respectivamente, consistindo de todos os elementos com determinante 1. Apesar da não comutatividade de  $\mathbb{H}$  impedir qualquer noção óbvia de determinante para matrizes quatérnias, é possível definir o **grupo linear especial quatérnio**  $SL(n, \mathbb{H})$  como o subconjunto de  $GL(n, \mathbb{H})$  consistindo de todos os elementos  $P$  tais que  $\det \phi(P) = 1$ . De fato, este é um subgrupo de  $GL(n, \mathbb{H})$ . É possível mostrar diretamente que  $GL(n, \mathbb{H})$ ,  $Sp(n)$  e  $SL(n, \mathbb{H})$  são todas subvariedades de  $Gl(2n, \mathbb{C})$ , mas existe um resultado mais geral que garante que todo subgrupo fechado de um grupo linear complexo é necessariamente uma subvariedade (ver [How83]). Concluimos que todos os grupos clássicos são grupos de Lie.

Uma **álgebra de Lie** é um espaço vetorial  $\mathfrak{L}$  no qual é definida uma operação  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}$ , chamada **colchete**, que satisfaz as seguintes propriedades:

- 1) antissimetria  $[x, y] = -[y, x]$ ;
- 2) identidade de Jacobi  $[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$

Duas álgebras de Lie  $\mathfrak{L}_1$  e  $\mathfrak{L}_2$  com colchetes  $[\cdot, \cdot]_1$  e  $[\cdot, \cdot]_2$  são isomorfas se existe um isomorfismo linear  $T : \mathfrak{L}_1 \rightarrow \mathfrak{L}_2$  que satisfaz  $T([x, y]_1) = [T(x), T(y)]_2$  para todos  $x, y \in \mathfrak{L}_1$ . Alguns exemplos são:

1. Qualquer espaço vetorial de dimensão finita  $\mathcal{V}$  com o **colchete trivial**  $[\cdot, \cdot] : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  definido por  $[x, y] = 0 \in \mathcal{V}$  para todo  $x, y \in \mathcal{V}$ .

2. O **comutador** de duas matrizes  $A$  e  $B$  é definido por  $[A, B] = AB - BA$ . Como  $[A, B] = -[B, A]$  e  $[[A, B], C] + [[C, A], B] + [[B, C], A] = 0$ , qualquer conjunto de matrizes que forme um espaço vetorial e seja fechado em relação ao comutador é uma álgebra de Lie com colchete dado pelo comutador. Exemplos incluem  $\mathfrak{gl}(\mathbb{R})$ ,  $\mathfrak{gl}(\mathbb{C})$  e  $\mathfrak{gl}(\mathbb{H})$  assim como conjuntos de todas matrizes  $n \times n$  reais simétricas ( $A^T = -A$ ), o conjunto de todas as matrizes  $n \times n$  complexas simétricas Hermitianas ( $\bar{A}^T = -A$ ) e o conjunto de todas as matrizes  $n \times n$  complexas que são ambas simétrias Hermitianas e livres de traço ( $\text{tr}(A) = 0$ ).

3. O conjunto  $\text{Im}\mathbb{C}$  dos complexos puros  $a\mathbf{i}$  com colchete trivial é uma álgebra de Lie de dimensão 1.

4. O conjunto  $\text{Im}\mathbb{H}$  dos quatérnios puros  $x = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$  com o colchete  $[x, y] = xy - yx = 2\text{Im}(xy)$  é uma álgebra de Lie de dimensão 3. Esta álgebra de Lie é isomorfa à álgebra de Lie que consiste de  $\mathbb{R}^3$  e colchete  $[x, y] = x \times y$ .

Todo grupo de Lie  $G$  possui uma álgebra de Lie associada  $\mathfrak{g}$  (chamada **álgebra de Lie de  $G$** ) que pode ser descrita em umas das duas formas equivalentes:

(i) Um campo vetorial  $\mathbf{V}$  em  $G$  é dito ser **invariante pela esquerda** se  $(L_g)_* \circ \mathbf{V} = \mathbf{V} \circ L_g$ , para todo  $g \in G$ , i.e., se

$$(L_g)_{*h}(\mathbf{V}(h)) = \mathbf{V}(gh), \quad \forall g, h \in G$$

Tais campos vetoriais são necessariamente suaves (Teorema 5.8.2 [Nab10]). O conjunto  $\mathcal{G}$  de todos os campos vetoriais invariantes pela esquerda em  $G$  é um subespaço linear de  $\mathfrak{X}(G)$  e é fechado em relação a formação de colchetes de Lie (Teorema 5.8.4). Como o colchete de Lie é antissimétrico e satisfaz a identidade de Jacobi, este mune  $\mathcal{G}$  com a estrutura de álgebra de Lie.

(ii) Se  $e$  denota o elemento identidade em  $G$  então a aplicação  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}(e)$  é um isomorfismo linear de  $\mathcal{G}$  sobre  $T_e(G)$ . Defina o colchete  $[\cdot, \cdot]$  em  $T_e(G)$  da seguinte maneira: Para  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_e(G)$  existem únicos campos vetoriais invariantes pela esquerda  $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathcal{G}$  com  $\mathbf{V}(e) = \mathbf{v}$  e  $\mathbf{W}(e) = \mathbf{w}$ . Faça  $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{V}, \mathbf{W}](e)$ . Com isto,  $T_e(G)$  é uma álgebra de Lie isomorfa a  $\mathcal{G}$ .

Para grupos de Lie de matrizes  $G$ ,  $T_{id}(G)$  pode ser identificado com o conjunto de matrizes (vetores velocidades em  $t = 0$  às curvas suaves  $t \mapsto (a_{ij}(t))$ ) com  $(a_{ij}(0) = id, \text{ calculada entrada a entrada})$ . É possível mostrar que este conjunto é sempre fechado em relação à formação de comutadores e que a álgebra de Lie consistindo de  $T_{id}(G)$  com colchete comutador é isomorfo à álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  de  $G$  como definida em (ii). Assim, o problema de encontrar a álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  de um grupo de matrizes de Lie  $G$  reduz-se em identificar o conjunto das matrizes que surgem como vetores velocidades à curvas suaves em  $G$  que passam pela identidade  $id$ . A seguir alguns exemplos:

1. Para  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  e  $\mathbb{H}$ , a álgebra de Lie de  $GL(n, \mathbb{F})$  é o conjunto  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$  de todas as matrizes  $n \times n$  com entradas em  $\mathbb{F}$ .
2. A álgebra de Lie  $\mathfrak{o}(n)$  do grupo ortogonal  $O(n)$  é o conjunto de todas as matrizes  $n \times n$  reais, antissimétricas.
3. A álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(n)$  do grupo linear especial  $SO(n)$  coincide com a álgebra de Lie  $\mathfrak{o}(n)$  de  $O(n)$  (pois  $SO(n)$  é uma componente conexa de  $O(n)$  que contem  $id$  então  $T_{id}(SO(n)) = T_{id}(O(n))$ ).
4. A álgebra de Lie  $\mathfrak{u}(n)$  do grupo unitário  $U(n)$  é o conjunto de todas as matrizes  $n \times n$  complexas antissimétricas.
5. A álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(n)$  do grupo unitário  $SU(n)$  é o conjunto de todas as matrizes  $n \times n$  complexas antissimétricas e de traço livre.
6. Identificando  $Sp(n)$  com o grupo de Lie de matrizes  $\{U \in U(2n); U^T J U = J\}$ , a álgebra de Lie  $\mathfrak{sp}(n)$  de  $Sp(n)$  é dada por

$$\begin{aligned} \mathfrak{sp}(n) &= \{M \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}); \bar{M}^T = -M \text{ e } JM + M^T J = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}); A \in \mathfrak{u}(n), B^T = B \right\} \end{aligned}$$

Grupos de Lie isomorfos possuem álgebras de Lie isomorfas. Por exemplo,  $SU(2)$  e  $Sp(1)$  são isomorfos e portanto também são isomorfas suas álgebras de Lie  $\mathfrak{su}(2)$  e  $\mathfrak{sp}(1)$ . Mas  $\mathfrak{sp}(1)$  é naturalmente identificado com a álgebra de Lie  $\text{Im}\mathbb{H}$  dos quatérnios imaginários puros, o que por sua vez, é isomorfo a  $\mathbb{R}^3$  com colchete sendo o produto vetorial. Entretanto, grupos de Lie não isomorfos podem ter álgebras de Lie isomorfas. Daremos o exemplo não trivial de  $SU(2)$  e  $SO(3)$ . Este claramente não são isomorfos como grupos de Lie. De fato,  $SU(2) \cong S^3$  pelo Teorema 1.1.4 [Nab10] e  $\pi_1(S^3) = 0$  (a prova disto não é trivial). Por outro lado  $SO(3) \cong \mathbb{RP}^3$  (pag 399, [Nab10]) e  $\pi_1(\mathbb{RP}^3) \cong \mathbb{Z}_2$  pelo Teorema 2.4.5 [Nab10]. Para ver que  $\mathfrak{su}(2)$  e  $\mathfrak{so}(3)$  são isomorfos introduzimos a noção de “constantes estruturais” de um grupo de Lie. Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie qualquer. Selecione uma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  para  $\mathfrak{g}$ . Para todo  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $[e_i, e_j]$  pertence a  $\mathfrak{g}$  então existem únicas constantes  $C_{ij}^k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , tais que  $[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k$ . As constantes  $C_{ij}^k$ ,  $i, j, k = 1, \dots, n$  são chamadas **constantes estruturais** de  $\mathfrak{g}$  relativas à base  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Duas álgebras de Lie são claramente isomorfas se, e somente se, existem bases para as

quais as constantes estruturais são as mesmas. Agora, uma base natural para  $\mathfrak{so}(3)$  consiste de

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.2)$$

e um cálculo simples mostra que  $[\tau_i, \tau_j] = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \tau_k$ , onde  $\epsilon_{ijk}$  é o símbolo de Levi-Civita definido por

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se } ijk \text{ é uma permutação par de } 123 \\ -1, & \text{se } ijk \text{ é uma permutação ímpar de } 123 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.2.3)$$

A base usual de  $\mathfrak{su}(2)$  consiste de  $T_k = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} \sigma_k$  onde

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.2.4)$$

chamadas **matrizes de Pauli** não é difícil mostrar que

$$\sigma_j^2 = \sigma_j \sigma_j = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3$$

$\sigma_j \sigma_k = -\sigma_k \sigma_j = \mathbf{i} \sigma_i$ , onde  $ijk$  é uma permutação par de 123. Daí pode-se verificar que  $[T_i, T_j] = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} T_k$ . Logo  $\mathfrak{so}(3)$  e  $\mathfrak{su}(2)$  são isomorfos.

Para qualquer  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  definimos  $\exp(A) = e^A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ . A série converge absolutamente e uniformemente em toda região limitada de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{2n^2}$  (segue do Teste-M de Weierstrass). Toda  $\exp(A)$  é invertível (pois  $\det(e^A) = e^{\text{tr } A}$ ), então  $\exp$  é uma aplicação suave de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  em  $GL(n, \mathbb{C})$ . Para qualquer  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ , a curva

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow GL(n, \mathbb{C}) \\ t &\mapsto e^{tA} \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

é um homomorfismo suave do grupo aditivo  $\mathbb{R}$  sobre  $GL(n, \mathbb{C})$  cujo vetor velocidade em  $t = 0$  é  $A$ .  $G$  é um grupo de Lie de matrizes qualquer, então sua álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  pode ser identificada com uma subálgebra de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  para algum  $n$  e a restrição de  $\exp$  a  $\mathfrak{g}$  é levado em  $G$ . Apresentamos o seguinte resultado (ver Teorema 5.8.6 [Nab10]) que é de nosso interesse neste trabalho.

**Teorema 2.2.1.** *Seja  $A$  em  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ .*

1. *Se  $A$  é antissimétrica Hermitiana ( $\bar{A}^T = -A$ ), então  $e^A \in U(n)$ .*
2. *Se  $A$  é antissimétrica Hermitiana e possui  $\text{tr } A = 0$ , então  $e^A \in SU(n)$ .*

3. Se  $n = 2m$  e  $A$  é antissimétrica Hermitiana e satisfaz  $JA + A^T J = 0$ , onde  $J = \begin{pmatrix} 0 & id \\ -id & 0 \end{pmatrix}$  e  $id$  é a matriz identidade  $m \times m$ , então  $e^A \in Sp(m) = \{M \in U(2m); M^T J M = J\}$ .

Além disso, existem vizinhanças abertas  $V$  de  $0$  em  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  e  $U$  de  $id$  em  $GL(n, \mathbb{C})$  tais que  $\exp : V \rightarrow U$  é um difeomorfismo e, em  $V$ , a recíproca de cada implicação (1), (2) e (3) é assegurada.

**Observação 2.2.1.** Como dissemos na seção 2.1 os grupos clássico  $U(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $Sp(n)$  são subvariedades de  $GL(n, \mathbb{C})$  e  $GL(2n, \mathbb{C})$ , respectivamente. Para vermos isso, definimos para uma carta  $(U, \varphi)$  em  $X$  com funções coordenadas  $x^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Sejam  $x^{i_1}, \dots, x^{i_{n-k}}$  quaisquer  $n - k$  dessas funções coordenadas e  $c^1, \dots, c^{n-k}$  constantes. O conjunto

$$\{p \in U; x^{i_1} = c^1, \dots, x^{i_{n-k}} = c^{n-k}\} \quad (2.2.6)$$

é chamado de **corte da coordenada- $\varphi$**  de  $U$ . Então temos o seguinte resultado: Um subespaço topológico  $X'$  de  $X$  é uma subvariedade de dimensão  $k$  de  $X$  se, e somente se, para cada ponto  $p' \in X'$  existe uma carta  $(U, \varphi)$  de  $X$  tal que  $U \cap X'$  é um slice da coordenada- $\varphi$  de  $U$  contendo  $p'$ .

Agora, tomando  $U$  e  $V$  como no Teorema 2.2.1 acima as restrições da carta  $(U, (\exp|V)^{-1})$  para um desses subgrupos nos dá um slice da coordenada- $\varphi$  na identidade. Ora, para termos esse slice em todos os pontos usamos a translação à esquerda  $L_g$  da seguinte forma: para todo  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ , tomamos  $L_g|U \circ \exp|V(A) = ge^A$ . Então  $(L_g|U \circ \exp|V)^{-1} = (\exp|V)^{-1} \circ (L_g|U)^{-1} = (\exp|V)^{-1} \circ L_{g^{-1}}|U$ , e conseqüentemente temos que a restrição da carta  $(U, (\exp|V)^{-1} \circ L_{g^{-1}}|U)$  para os subgrupos  $U(n)$ ,  $SU(n)$  e  $Sp(m)$ , com  $m = 2n$  nos dá um slice da coordenada- $\varphi$ , pelo resultado que acabamos de enunciar, temos que  $U(n)$ ,  $SU(n)$  e  $Sp(m)$  são subvariedades de  $GL(n, \mathbb{F})$ , onde  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  e  $\mathbb{H}$ , respectivamente.

A aplicação  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  possui derivada em  $0 \in \mathfrak{g}$  e, identificando  $T_e(\mathfrak{g})$  com  $\mathfrak{g}$ , pelo isomorfismo canônico,  $\exp_{*0} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  é a aplicação identidade.

Uma 1-forma  $\Theta$  em um grupo de Lie  $G$  é dita ser **invariante pela esquerda** se  $(L_g)^* \Theta = \Theta$ , para todo  $g \in G$ , isto é, para todos  $g, h \in G$  tem-se que

$$\Theta(h) = (L_g)^*(\Theta(gh)), \quad \text{ou equivalentemente,} \quad \Theta(gh) = (L_{g^{-1}})^*(\Theta(h)) \quad (2.2.7)$$

Qualquer 1-forma desse tipo é necessariamente suave (basta mostrar que  $\Theta V \in C^\infty(G)$  para todo  $V \in \mathfrak{X}(G)$ ) e fica determinada unicamente por seu valor em  $id$ . Em particular, qualquer covetor  $\Theta_{id}$  em  $id \in G$  determina de maneira única uma 1-forma  $\Theta$  em  $G$  invariante pela esquerda tal que  $\Theta(id) = \Theta_{id}$ . Um exemplo particularmente importante é

a 1-forma de Cartan  $\Theta$  em  $G$  com valores em  $\mathfrak{g}$  é definida da seguinte forma: para cada  $g \in G$ ,  $\Theta(g) = \Theta_g : T_g(G) \rightarrow \mathfrak{g}$  é dada por

$$\Theta(g)(\mathbf{v}) = \Theta_g(\mathbf{v}) = (L_{g^{-1}})_{*g}(\mathbf{v}) \quad (2.2.8)$$

Equivalentemente,

$$c(g)(\mathbf{A}(g)) = \mathbf{A}(id) \quad (2.2.9)$$

para todo campo de vetor invariante pela esquerda  $\mathbf{A}$  em  $G$ . Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base de  $\mathfrak{g}$  e considere  $\{\Theta^1, \dots, \Theta^n\}$  as únicas 1-formas invariantes pela esquerda com valores reais em  $G$  das quais  $\{\Theta^1(id), \dots, \Theta^n(id)\}$  forma uma base dual de  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Então a 1-forma de Cartan  $\Theta$  é dada por

$$\Theta = \Theta^1 e_1 + \dots + \Theta^n e_n$$

Para mostrarmos isso, tome  $g \in G$  qualquer e  $\mathbf{v} \in T_g(G)$  arbitrário, então

$$\begin{aligned} ((\Theta^i e_i)(g))(\mathbf{v}) &= (\Theta^i(g)(\mathbf{v}))e_i = (((L_{g^{-1}})^*(\Theta^i(id)))(\mathbf{v}))e_i \\ &= \Theta^i(id)((L_{g^{-1}})_{*g}(\mathbf{v}))e_i = (L_{g^{-1}})_{*g}(\mathbf{v}) = \Theta_g(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

As equações de Maurer-Cartan de  $\Theta$  afirmam que

$$d\Theta^k = \frac{1}{2}C_{ij}^k \Theta^i \wedge \Theta^j, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.2.10)$$

onde  $C_{ij}^k$  são as constantes estruturais de  $\mathfrak{g}$  em relação à base  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Se  $H$  é um subgrupo de  $G$  que também é uma subvariedade e  $\iota : H \hookrightarrow G$  é a aplicação inclusão, então a 1-forma de Cartan  $\Theta_H$  de  $H$  é a restrição a  $H$  da 1-forma de Cartan  $\Theta_G$  de  $G$ , i.e.,

$$\Theta_H = \iota^* \Theta_G$$

Para vermos isso, fixamos  $h \in H$ . Então, para qualquer  $\mathbf{v} \in T_h(H)$ ,

$$((\iota^* \Theta_G)(h))(\mathbf{v}) = ((\Theta_G)(\iota(h)))(\iota_{*h}(\mathbf{v})) = (\Theta_G(h))(\iota_{*h}(\mathbf{v}))$$

então precisamos mostrar que isto é igual a  $(\Theta_H(h))(\mathbf{v})$ . Considere  $L_{h^{-1}} : H \rightarrow H$  e  $\hat{L}_{g^{-1}} : G \rightarrow G$  as aplicações de translação à esquerda em  $H$  e  $G$ . Logo  $L_{h^{-1}} = \hat{L}_{h^{-1}} \circ \iota$  então

$$\begin{aligned} (\Theta_H(h))(\mathbf{v}) &= (L_{h^{-1}})_{*h}(\mathbf{v}) = (\hat{L}_{h^{-1}} \circ \iota)_{*h}(\mathbf{v}) = (\hat{L}_{h^{-1}})_{*\iota(h)}(\iota_{*h}(\mathbf{v})) \\ &= (\hat{L}_{h^{-1}})_{*h}(\iota_{*h}(\mathbf{v})) = (\Theta_G(h))(\iota_{*h}(\mathbf{v})) \end{aligned}$$

como queríamos. Em seguida alguns exemplos.

1.  $G = GL(n, \mathbb{H})$ ,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{H})$ : Para todo  $g \in GL(n, \mathbb{H})$ ,

$$\Theta(g) = g^{-1}dq$$

onde

$$dq = \begin{pmatrix} dq^{11} & \cdots & dq^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dq^{n1} & \cdots & dq^{nn} \end{pmatrix}$$

com  $dq^{ij} = dx^{ij} + dy^{ij}\mathbf{i} + du^{ij}\mathbf{j} + dv^{ij}\mathbf{k}$ , para  $i, j = 1, \dots, n$ . Quando  $n = 1$  e se identificarmos uma matriz  $1 \times 1$   $g = (q)$  com a sua única entrada  $q$ ,  $GL(1, \mathbb{H})$  é apenas o grupo  $\mathbb{H} - \{0\}$  de quatérnios não nulos e então  $g^{-1}dq$  é apenas o produto quatérnio e  $g^{-1}dq$  é apenas o produto dos quatérnios

$$g^{-1}dq = q^{-1}dq = \frac{\bar{q}}{|q|^2}dq \quad (2.2.11)$$

Identificando os vetores tangentes  $\mathbf{v} \in T_q(\mathbb{H} - \{0\})$  com quatérnios  $v \in \mathbb{H}$  através do isomorfismo canônico, temos que  $q^{-1}dq = \frac{1}{|q|^2}\bar{v}$ .

2.  $G = SU(2) \cong Sp(1)$ ,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{sp}(1) \cong \text{Im}\mathbb{H}$ : Primeiro considere  $G$  sendo  $SU(2) \subseteq GL(2, \mathbb{C})$ . Então  $\Theta_{SU(2)}$  é a restrição de  $\Theta_{GL(2, \mathbb{C})}$  a  $SU(2)$ . É possível mostrar que

$$\Theta_{SU(2)} = \begin{pmatrix} \bar{z}^{11}dz^{11} + z^{12}d\bar{z}^{12} & \bar{z}^{11}dz^{11} - z^{12}d\bar{z}^{12} \\ -z^{11}d\bar{z}^{12} + \bar{z}^{12}dz^{11} & z^{11}d\bar{z}^{12} + \bar{z}^{12}dz^{11} \end{pmatrix} \quad (2.2.12)$$

em  $SU(2)$ . Agora pense em  $G$  como  $Sp(1)$  (identificado com os quatérnios unitários). Então  $\Theta_{Sp(1)}$  é a restrição de  $\Theta_{GL(1, \mathbb{H})} = \mathbb{H} - \{0\}$ . Como em  $Sp(1)$ ,  $|q|^2 = 1$  então temos que

$$\Theta_{Sp(1)} = q^{-1}dq = \bar{q}dq \quad (2.2.13)$$

em  $Sp(1)$ . A identificação natural de  $Sp(1)$  com  $SU(2)$  é dada por

$$A + B\mathbf{j} \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \quad (2.2.14)$$

e esta leva  $\Theta_{Sp(1)}$  em  $\Theta_{SU(2)}$ . No Capítulo 3 trabalhamos com o exemplo principal deste trabalho, a 1-forma de Cartan  $\Theta_G$  de  $Sp(2)$ .

Seja  $G$  um grupo de Lie de matrizes,  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial de dimensão finita e  $GL(\mathcal{V})$  das transformações lineares não singulares em  $\mathcal{V}$ . A **representação de  $G$  em  $\mathcal{V}$**  é um homomorfismo de grupo de  $G$  em  $GL(\mathcal{V})$ . Escolhendo uma base para  $\mathcal{V}$  pode-se considerar qualquer representação de  $G$  em  $\mathcal{V}$  como uma aplicação de  $G$  sobre algum grupo linear e dizemos que a representação é contínua, suave, etc., se sua aplicação correspondente com valores nas matrizes é contínua, suave, etc.. Observe que esta definição não depende da



escolha da base de  $\mathcal{V}$ . Um exemplo de grande importância é dado a seguir. Para cada  $g \in G$  defina uma aplicação

$$\begin{aligned} Ad_g : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

para todo  $h \in G$ . Logo  $Ad_g = L_g \circ R_{g^{-1}} = R_{g^{-1}} \circ L_g$  é um difeomorfismo. Além disso,  $Ad_g(id) = id$  então a derivada de  $Ad_g$  na identidade de leva  $\mathfrak{g}$  isomorficamente em  $\mathfrak{g}$ . Denotamos essa aplicação por

$$ad_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

Logo,

$$ad_g = (Ad_g)_*id = (L_g)_{g^{-1}} \circ (R_{g^{-1}})_{id} = (R_{g^{-1}})_g \circ (L_g)_{id}$$

e mostramos agora um resultado que usaremos posteriormente.

**Lema 2.2.1.** *Sejam  $G$  um grupo de Lie de matrizes,  $\mathfrak{g}$  sua álgebra de Lie e  $g \in G$ . Então, para cada  $A \in \mathfrak{g}$ ,  $gAg^{-1} \in \mathfrak{g}$  e o isomorfismo  $ad_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  é dado por  $ad_g(A) = gAg^{-1}$ .*

**Demonstração.** Qualquer elemento de  $\mathfrak{g}$  é  $\alpha'(0)$  para alguma curva suave  $\alpha$  em  $G$  tal que  $\alpha(0) = id$  e

$$ad_g(\alpha'(0)) = (Ad_g)_*\alpha'(0) = (Ad_g \circ \alpha)'(0)$$

Ora,

$$(Ad_g \circ \alpha)(t) = Ad_g(\alpha(t)) = g\alpha(t)g^{-1}$$

Derivando entrada a entrada obtemos  $ad_g(\alpha'(0)) = g\alpha'(0)g^{-1}$  como queríamos. ■

A correspondência  $g \mapsto ad_g$  é um homomorfismo de  $G$  sobre  $GL(\mathfrak{g})$  e é chamado **representação adjunta** de  $G$  em  $\mathfrak{g}$ . A importância da representação adjunta torna-se-a clara quando discutirmos conexões em fibrados principais.

Usaremos alguns fatos gerais sobre a forma de Killing restritos, claro, aos casos de interesse neste trabalho. Se  $G$  é um grupo de Lie de matrizes com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  e se  $A$  e  $B$  são dois elementos fixados em  $\mathfrak{g}$ , então podemos definir uma transformação linear  $K_{AB} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  pondo  $K_{AB}(X) = [[A, B], X]$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$ . Então o traço da matriz desta transformação linear é um número real (pois  $\mathfrak{g}$  é um espaço vetorial) e a aplicação  $K : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $K(A, B) = \text{tr}(K_{AB})$  é uma forma bilinear simétrica em  $\mathfrak{g}$  chamada **forma de Killing** de  $\mathfrak{g}$ .  $K$  é **invariante por**  $ad(G)$  no sentido que, para qualquer  $g \in G$ ,

$$K(ad_g(A), ad_g(B)) = K(A, B), \quad \forall A, B \in \mathfrak{g}$$

O grupo de Lie  $G$  é dito ser **semi-simples** se a forma de Killing é não degenerada.

Se  $G$  é conexo e semi-simples, então, por um Teorema de Weyl (Capítulo II, seção 6 de [Hel62]), a forma de Killing é negativa se, e somente se,  $G$  é compacto. Neste caso, obtém-se um produto interno positivo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , invariante por  $ad(G)$  em  $\mathfrak{g}$  fazendo  $\langle A, B \rangle = -K(A, B)$ .

A métrica Riemanniana  $\mathbf{g}$  em  $G$  é então obtida por translação à esquerda, i.e., definindo, para cada  $a \in G$  e todos  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_e(G)$

$$\mathbf{g}_a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle (L_{a^{-1}})_*(\mathbf{v}), (L_{a^{-1}})_*(\mathbf{w}) \rangle \quad (2.2.15)$$

Esta métrica é **invariante pela esquerda**, i.e.,  $L_a^* \mathbf{g} = \mathbf{g}$  para todo  $a \in G$ , pois

$$\begin{aligned} (L_a^* \mathbf{g})_b(\mathbf{v}\mathbf{w}) &= \mathbf{g}_{ab}((L_a)_*(\mathbf{v}), (L_a)_*(\mathbf{w})) \\ &= \langle (L_{(ab)^{-1}})_{*ab}((L_a)_*(\mathbf{v})), L_{(ab)^{-1}})_{*ab}((L_a)_*(\mathbf{w})) \rangle \\ &= \langle (L_{b^{-1}})_{*b}(\mathbf{v}), (L_{b^{-1}})_{*b}(\mathbf{w}) \rangle \\ &= \mathbf{g}_b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

Também é **invariante pela direita**, pois para todo  $a \in G$  tem-se que

$$\begin{aligned} (R_a^* \mathbf{g})_b(\mathbf{v}\mathbf{w}) &= \mathbf{g}_{ba}((R_a)_*(\mathbf{v}), (R_a)_*(\mathbf{w})) \\ &= \langle (L_{(ba)^{-1}})_{*ba}((R_a)_*(\mathbf{v})), L_{(ba)^{-1}})_{*ba}((R_a)_*(\mathbf{w})) \rangle \\ &= \langle (L_{a^{-1}b^{-1}} \circ R_a)_{*b}(\mathbf{v}), (L_{a^{-1}b^{-1}} \circ R_a)_{*b}(\mathbf{w}) \rangle \\ &= \langle (Ad_{a^{-1}} \circ L_{b^{-1}})_{*b}(\mathbf{v}), (Ad_{a^{-1}} \circ L_{b^{-1}})_{*b}(\mathbf{w}) \rangle \\ &= \langle ad_{a^{-1}}((L_{b^{-1}})_{*b}(\mathbf{v})), ad_{a^{-1}}((L_{b^{-1}})_{*b}(\mathbf{w})) \rangle \\ &= \langle (L_{b^{-1}})_{*b}(\mathbf{v}), (L_{b^{-1}})_{*b}(\mathbf{w}) \rangle \\ &= \mathbf{g}_b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

Uma métrica em um grupo de Lie que é invariante pela esquerda e pela direita é dito ser **bi-invariante** e acabamos de mostrar que a forma de Killing em um grupo de Lie  $G$ , compacto, conexo, semi-simples dá origem a uma métrica Riemanniana em  $G$ . Isto implica que, em particular, para  $G = SU(2)$  que certamente é compacto e conexo (lembre-se  $SU(2) \cong S^3$ ) também é semisimples ( $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{sp}(1) \cong \text{Im}\mathbb{H}$  é a única álgebra de Lie de dimensão 3, semi-simples). Fazendo os cálculos (um tanto extensos) considerando  $\mathfrak{su}(2)$  como sendo a álgebra de Lie de obtemos  $\langle A, B \rangle = -K(A, B) = -\text{tr}(AB)$ . Por outro lado, a identificação natural

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 + a_3 \mathbf{i} \\ -a_2 + a_3 \mathbf{i} & -a_1 \mathbf{i} \end{pmatrix} \mapsto a_1 \mathbf{i} + (a_2 + a_3) \mathbf{j} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} \quad (2.2.16)$$

de  $\mathfrak{su}(2)$  com  $\text{Im}\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$ ,  $\langle, \rangle$  nada mais é do que duas vezes o produto interno usual em  $\mathbb{R}^3$ .

A seguir, supomos  $G$  um grupo de Lie e  $P$  uma variedade diferenciável. Uma **ação suave à direita** de  $G$  sobre  $P$  é uma aplicação suave  $\sigma : P \times G \rightarrow P$  que satisfaz

1.  $\sigma(p, e) = p$ , para todo  $p \in P$ , e
2.  $\sigma(p, g_1 g_2) = \sigma(\sigma(p, g_1), g_2)$ , para todos  $g_1, g_2 \in G$  e todo  $p \in P$ .

Pode-se escrever mais geralmente  $\sigma(p, g) = p \cdot g$  e pensar em  $g$  “agindo em”  $p$  para produzir  $p \cdot g \in P$ . Para um  $g \in G$  fixado definimos  $\sigma_g : P \rightarrow P$  por  $\sigma_g(p) = p \cdot g$ . Então  $\sigma_g$  é um difeomorfismo de  $P$  em  $P$  cuja inversa é  $\sigma_{g^{-1}}$ . De modo análogo, uma **ação suave à esquerda** de  $G$  sobre  $P$  é uma aplicação suave  $\rho : G \times P \rightarrow P$  que satisfaz:

1.  $\sigma(p, e) = p$ , para todo  $p \in P$ , e
2.  $\sigma(g_1 g_2, p) = \sigma(g_1, \sigma(g_2, p))$ , para todos  $g_1, g_2 \in G$  e todo  $p \in P$ .

As aplicações  $\rho_g : P \rightarrow P$  definidas por  $\rho_g(p) = g \cdot p$  são difeomorfismos.

Uma ação à direita é dita ser **efetiva** se  $p \cdot g = p$  para todo  $p \in P$  implica que  $g = e$ , i.e.,  $\sigma_g = id_P$  se, e somente se,  $g = e$ . A ação é dita ser **livre** se  $p \cdot g = p$  para algum  $p \in P$  implica que  $g = e$ , i.e.,  $\sigma_g$  possui um ponto fixo se, e somente se,  $g = e$ . Uma ação livre e efetiva, mas a recíproca geralmente é falsa. A ação é dita ser **transitiva** se, dados quaisquer dois pontos  $p_1$  e  $p_2$  em  $P$ , existe  $g \in G$  tal que  $p_2 = p_1 \cdot g$ . Dado um  $p \in P$  qualquer defini-se a **órbita** de  $p$  em relação a  $\sigma$  como sendo o subconjunto de  $G$

$$p \cdot G = \{p \cdot g; g \in G\} \quad (2.2.17)$$

e seu **subgrupo de isotropia** (ou **estabilizador**) como sendo o conjunto

$$G_p = \{g \in G; p \cdot g = p\} \quad (2.2.18)$$

Temos que  $G_p$  é um subgrupo fechado de  $G$  para qualquer  $p \in P$  (Prop 7.26 + Prop 7.11 John M. Lee). Uma ação é livre se todo grupo de isotropia é trivial e transitiva se existe uma única órbita. A seguir, alguns exemplos:

1. Qualquer grupo de Lie  $G$  age sobre si mesmo através da multiplicação à direita. Definindo,  $\sigma : G \times G \rightarrow G$  por  $\sigma(p, g) = pg$  para todos  $p, g \in G$  produz uma ação de  $G$  sobre  $G$ , claramente livre ( $pg = p \implies g = e$ ) e transitiva ( $p_2 = p_1(p_1^{-1}p_2)$ ).

2. Qualquer grupo de Lie  $G$  age sobre si mesmo por meio de conjugação. Isto é, definindo  $\sigma : G \times G \rightarrow G$  por  $\sigma(p, g) = gpg^{-1}$  para todos  $p, g \in G$  produz uma ação suave à direita que não é livre nem transitiva (a menos que  $G = \{e\}$ ). Note que  $G_e = G$  e, em geral,  $G_g$  é o centralizador de  $g \in G$ . A ação é efetiva se, e somente se, o centro de  $G$  é trivial. As órbitas são as classes de conjugação de  $G$ . A ação suave à esquerda correspondente é  $\rho(g, p) = p \cdot g = gpg^{-1} = Ad_g(p)$ .

3.  $GL(n, \mathbb{F})$  age sobre  $\mathbb{F}^n$  (à esquerda) por  $A \cdot v = Av$ , onde os elementos de  $\mathbb{F}^n$  são escritos como matrizes colunas e o produto pela esquerda é a multiplicação de matrizes. Esta ação é efetiva, porém não é livre nem transitiva pois  $GL(n, \mathbb{F})$  fixa  $o \in \mathbb{F}^n$ . A mesma ação em  $\mathbb{F} - \{0\}$  é transitiva. ]

4.  $O(n)$  e  $SO(n)$  agem transitivamente em  $S^{n-1}$  através de  $A \cdot v = Av$ . O subgrupo de isotropia do pólo norte  $e_n = (0, \dots, 0, 1) \in S^{n-1}$  sob a ação de  $O(n)$  (respectivamente  $SO(n)$ ) em  $S^{n-1}$  é isomorfa a  $O(n-1)$  (respectivamente,  $SO(n-1)$ ). Da mesma maneira,

$U(n)$  e  $SU(n)$  agem transitivamente em  $S^{2n-1}$  e  $Sp(n)$  age transitivamente sobre  $S^{4n-1}$ . Os subgrupos de isotrofia no pólo norte são isomorfos a  $U(n-1)$ ,  $SU(n-1)$  e  $Sp(n-1)$ , respectivamente.

5. Identificando  $S^{4n-1}$  com o conjunto de todos  $(q^1, \dots, q^n) \in \mathbb{H}^n$  que satisfaz  $|q^1|^2 + \dots + |q^n|^2 = 1$  e  $Sp(1) \cong SU(2)$  com o grupo de quaternions unitários. Defina  $\sigma : S^{4n-1} \times Sp(1) \rightarrow S^{4n-1}$  por  $\sigma(p, g) = p \cdot g = (q^1, \dots, q^n) \cdot g = (q^1 g, \dots, q^n g)$ . Então  $\sigma$  é uma ação suave à direita de  $Sp(1)$  sobre  $S^{4n-1}$ , as órbitas são subvariedades de  $S^{4n-1}$  difeomórficas a  $S^1(1)$ , i.e.,  $S^3$ . O espaço órbita é  $\mathbb{H}\mathbb{P}^1$  e, quando  $n = 2$ , isto é simplesmente  $S^4$ .

Algumas observações precisam ser feitas a fim de esclarecer mais os exemplos 4 e 5.

**Observação 2.2.2.** *Existe um resultado geral (Teorema 1.6.6 [Nab10]) que afirma que, se  $G$  é compacto,  $(g, p) \mapsto g \cdot p$  é uma ação transitiva à esquerda de  $G$  sobre  $P$  e  $G_{p_0}$  é o subgrupo de isotrofia de algum  $p_0 \in P$  fixado sob esta ação, então o grupo quociente  $G/G_{p_0}$  é homeomorfo a  $P$ . O exemplo #4 então nos dá*

$$\begin{aligned} S^{n-1} &\cong O(n)/O(n-1) \cong SO(n)/SO(n-1) \\ S^{2n-1} &\cong U(n)/U(n-1) \cong SU(n)/SU(n-1) \\ S^{4n-1} &\cong Sp(n)/Sp(n-1) \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

A seguir escreveremos explicitamente o homeomorfismo  $S^7 \cong Sp(2)/Sp(1)$  o qual é muito importante pra este trabalho.

Assim, consideramos  $S^7$  como o conjunto de todos  $x = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^2$  com  $|q^1|^2 + |q^2|^2 = 1$  e  $Sp(2)$  como sendo o conjunto de matrizes  $2 \times 2$  quaternias  $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  tais que  $g\bar{g}^T = \bar{g}^T g = \mathbf{I}_2$ . Em particular,  $\bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\delta = 0$  e  $\gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta} = 1$ . A ação transitiva à esquerda de  $Sp(2)$  em  $S^7$  é dada por

$$(g, x) \mapsto g \cdot x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha q^1 + \beta q^2 \\ \gamma q^1 + \delta q^2 \end{pmatrix}$$

Agora, fixe  $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in S^7$ . Seu grupo de isotrofia consiste de todos  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  em  $Sp(2)$  tais que  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , i.e., para os quais  $\alpha = 1$  e  $\gamma = 0$ . Então  $\bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\delta = 0$  implica que  $\beta = 0$ , enquanto  $\gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta} = 1$  implica  $\delta\bar{\delta} = 1$ . Assim, o grupo de isotrofia consiste de todos  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  onde  $|a|^2 = 1$ . Como  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_1 a_2 \end{pmatrix}$  este subgrupo é isomorfo a  $Sp(1)$  dos quaternions unitários e vamos identificá-los

$$Sp(1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in Sp(2); |a|^2 = 1 \right\}$$

Fixemos um  $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sp(2)$ . A classe lateral à esquerda de  $g$  módulo o subgrupo  $Sp(1)$  é

$$\begin{aligned} [g] = gSp(1) &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in Sp(2); |a|^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta a \\ \gamma & \delta a \end{pmatrix} \in Sp(2); |a|^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

O homeomorfismo  $\varphi$  de  $Sp(2)/Sp(1)$  sobre  $S^7$  descrito no Teorema 2.6.2 é , portanto, dado por  $\varphi([g]) = g \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$ :

$$\begin{aligned} \varphi : Sp(2)/Sp(1) &\rightarrow S^7 \\ [g] &\mapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

onde  $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  (qualquer representante da classe lateral  $[g]$  que possua primeira coluna  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$ ).

O próximo resultado é algo que faremos uso.

**Proposição 2.2.1.**  *$Sp(2)$  é um subgrupo de  $SL(2, \mathbb{H})$ .*

**Demonstração.** Seja  $P \in Sp(2)$ . Considere  $\phi(P)$ , onde  $\phi$  é a função de (2.2.1). Então temos que

$$\det(\phi(P)^T J \phi(P)) = \det J \implies \det(\phi(P)^T \phi(P)) = 1 \implies \det \phi(P) = \pm 1$$

Resta mostrar que  $\det \phi(P) = 1$ . Ora, isso vem da continuidade de  $\det \circ \phi$  e da conexidade de  $Sp(2)$ , pois  $id \in Sp(2)$ . ■

## 2.3 Fibrados Principais

Seja  $X$  uma variedade diferenciável e  $G$  um grupo de Lie. Um  $G$ -**fibrado principal suave sobre**  $X$  consiste de uma variedade diferenciável  $P$ , uma aplicação suave  $\mathcal{P} : P \rightarrow X$  de  $P$  sobre  $X$  e uma ação suave à direita  $\sigma : P \times G \rightarrow P$ ,  $\sigma(p, g) = p \cdot g$ , de  $G$  sobre  $P$  tais que as seguintes condições sejam satisfeitas:

1.  $\sigma$  preserva as fibras de  $\mathcal{P}$ , i.e.,

$$\mathcal{P}(p \cdot g) = \mathcal{P}(p) \tag{2.3.1}$$

para todo  $p \in P$  e todo  $g \in G$ .

2. (**Trivialidade Local**) Para cada  $x_0 \in X$  existe um conjunto aberto  $V$  (**vizinhança trivializante**) em  $X$  contendo  $x_0$  e um difeomorfismo  $\Psi : \mathcal{P}^{-1}(V) \rightarrow V \times G$  da forma

$$\Psi(p) = (\mathcal{P}(p), \psi(p)) \quad (2.3.2)$$

onde  $\psi : \mathcal{P}^{-1}(V) \rightarrow G$  satisfaz

$$\psi(p \cdot g) = \psi(p)g \quad (2.3.3)$$

para todo  $p \in P$  e  $g \in G$  ( $\psi(p)g$  é o produto em  $G$  de  $\psi(p)$  e  $g$ ). Tal que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}^{-1}(V) & \xrightarrow{\Psi} & V \times G \\ & \searrow \mathcal{P} \quad \swarrow \mathcal{P}^1 & \\ & V & \end{array}$$

onde  $\mathcal{P}^1 : X \times Y \rightarrow X$  é a aplicação projeção do primeiro fator do produto  $X \times Y$ . Denotamos o  $G$ -fibrado principal sobre  $X$  pela tripla  $\mathcal{B}(P, \mathcal{P}, \sigma)$ .

O par  $(V, \Psi)$  é chamado **trivialização local** do  $G$ -fibrado e uma família  $\{(V_j, \Psi_j)\}_{j \in J}$  de trivializações locais tal que  $\bigcup_{j \in J} V_j = X$  é chamada **cobertura trivializante** de  $X$ . Dependendo do contexto podemos usar  $\mathcal{P} : P \rightarrow X$ , ou até mesmo  $P$ , para referirmos ao  $G$ -fibrado principal sobre  $X$  e indicamos isto escrevendo  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$ , ou simplesmente,  $G \hookrightarrow P \rightarrow X$ . Para cada  $p \in P$ , a fibra de  $\mathcal{P}$  acima de  $\mathcal{P}(p)$  coincide com a órbita de um  $p$  em relação à  $\sigma$  (Lema 4.1.1 [Nab10]) e é uma subvariedade de  $P$  difeomorfa a  $G$  (qualquer projeção  $\mathcal{P} : P \rightarrow X$  de um fibrado principal é uma submersão, e as fibras  $\mathcal{P}^{-1}(x)$  particionam o espaço total  $P$  em subvariedades de dimensão  $\dim P - \dim X$ ). Seguem alguns exemplos:

1. O **G-fibrado trivial** sobre  $X$  consiste da variedade produto  $P = X \times G$ , a projeção  $\mathcal{P} : X \times G \rightarrow X$  sobre o primeiro fator e a ação  $\sigma((x, h), g) = (x, h) \cdot g = (x, hg)$ . Neste caso a vizinhança trivializante  $V$  é todo  $X$  e  $\Psi$  é dada pela aplicação identidade em  $\mathcal{P}^{-1}(V) = \mathcal{P}^{-1}(X) = X \times G$ .

2. Seja  $P = S^{n-1}$ ,  $G = \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$  e  $\sigma : S^{n-1} \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow S^{n-1}$  a ação à direita  $\sigma(p, g) = p \cdot g = (x^1, \dots, x^n) \cdot g = (x^1 g, \dots, x^n g)$ . O espaço base é  $X = \mathbb{RP}^{n-1}$ , a projeção  $\mathcal{P} : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$  é a aplicação quociente, i.e.,  $\mathcal{P}(p) = \mathcal{P}(x^1, \dots, x^n) = [x^1, \dots, x^n]$ . Então  $\mathcal{P}(p \cdot g) = \mathcal{P}(\pm p) = [p] = \mathcal{P}(p)$  para todo  $p \in S^{n-1}$  e  $g \in \mathbb{Z}_2$ . Para cada  $k = 1, \dots, n$ , considere  $V_k = \{[p] = [x^1, \dots, x^n] \in \mathbb{RP}^{n-1}; x^k \neq 0\}$ . Então  $\mathcal{P}^{-1}(V_k) = \{p = (x^1, \dots, x^n) \in S^{n-1}; x^k \neq 0\}$  e definimos  $\Psi_k : \mathcal{P}^{-1}(V_k) \rightarrow V_k \times \mathbb{Z}_2$  por  $\Psi_k(p) = \Psi_k(x^1, \dots, x^n) = ([p], x^k/|x^k|)$ . Assim,  $\Psi_k$  é um difeomorfismo da forma  $\Psi_k(p) = (\mathcal{P}(p), \psi_k(p))$ , onde  $\psi_k(p) = \psi_k(x^1, \dots, x^n) =$

$x^k/|x^k|$  e  $\psi_k(p \cdot g) = (x^k g)/|x^g| = (x^k g)/|x^k| = \psi_k(p)g$ . Logo  $\{(V_k, \Psi_k)\}_{k=1, \dots, n}$  é uma cobertura trivializante de  $\mathbb{RP}^{n-1}$  e

$$\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow S^{2n-1} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{RP}^{n-1} \quad (2.3.4)$$

é um  $\mathbb{Z}_2$ -fibrado principal sobre  $\mathbb{RP}^{n-1}$ .

3. Seja  $P = S^{2n-1}$ ,  $G = U(1)$  e  $\sigma : S^{2n-1} \times U(1) \rightarrow S^{2n-1}$  a ação à direita  $\sigma(p, g) = p \cdot g = (z^1, \dots, z^n) \cdot g = (z^1 g, \dots, z^n g)$ . O espaço base é  $X = \mathbb{CP}^{n-1}$ , a projeção  $\mathcal{P} : S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$  é a aplicação quociente. Então  $\mathcal{P}(p \cdot g) = \mathcal{P}(p)$  para todo  $p \in S^{2n-1}$  e  $g \in U(1)$ . Para cada  $k = 1, \dots, n$ , considere  $V_k = \{[p] = [z^1, \dots, z^n] \in \mathbb{CP}^{n-1}; z^k \neq 0\}$ . Definimos  $\Psi_k : \mathcal{P}^{-1}(V_k) \rightarrow V_k \times U(1)$  por  $\Psi_k(p) = \Psi_k(z^1, \dots, z^n) = ([p], z^k/|z^k|)$ . Logo  $\{(V_k, \Psi_k)\}_{k=1, \dots, n}$  é uma cobertura trivializante de  $\mathbb{CP}^{n-1}$  e

$$U(1) \hookrightarrow S^{2n-1} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{CP}^{n-1} \quad (2.3.5)$$

é um  $U(1)$ -fibrado principal sobre  $\mathbb{CP}^{n-1}$ .

**Observação 2.3.1.** Quando  $n = 2$  podemos identificar  $\mathbb{CP}^1$  com a esfera  $S^2$  (ver pag. 33) e, portanto, obtemos um  $U(1)$ -fibrado principal sobre  $S^2$  conhecido como **fibrado de Hopf complexo**.

4. Seja  $P = S^{4n-1}$ ,  $G = Sp(1)$  e  $\sigma : S^{4n-1} \times Sp(1) \rightarrow S^{4n-1}$  a ação à direita  $\sigma(p, g) = p \cdot g = (q^1, \dots, q^n) \cdot g = (q^1 g, \dots, q^n g)$ . O espaço base é  $X = \mathbb{HP}^{n-1}$ , a projeção  $\mathcal{P} : S^{4n-1} \rightarrow \mathbb{HP}^{n-1}$  é a aplicação quociente. Então  $\mathcal{P}(p \cdot g) = \mathcal{P}(p)$  para todo  $p \in S^{4n-1}$  e  $g \in Sp(1)$ . Para cada  $k = 1, \dots, n$ , considere  $V_k = \{[p] = [q^1, \dots, q^n] \in \mathbb{HP}^{n-1}; q^k \neq 0\}$ . Definimos  $\Psi_k : \mathcal{P}^{-1}(V_k) \rightarrow V_k \times Sp(1)$  por  $\Psi_k(p) = \Psi_k(q^1, \dots, q^n) = ([p], q^k/|q^k|)$ . Logo  $\{(V_k, \Psi_k)\}_{k=1, \dots, n}$  é uma cobertura trivializante de  $\mathbb{HP}^{n-1}$  e

$$Sp(1) \hookrightarrow S^{4n-1} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{HP}^{n-1} \quad (2.3.6)$$

é um  $Sp(1)$ -fibrado principal sobre  $\mathbb{HP}^{n-1}$ .

**Observação 2.3.2.** Novamente, quando  $n = 2$ , podemos identificar  $\mathbb{HP}^1$  com  $S^4$  e obtemos o **fibrado de Hopf quatérnio ou quaterniônico**.

5. Seja  $\mathcal{P} : P \rightarrow X$  um  $G$ -fibrado principal sobre  $X$  (com ação à direita  $\sigma$ ) e suponha que  $X'$  seja uma subvariedade de  $X$ . Seja  $P' = \mathcal{P}^{-1}(X')$ ,  $\mathcal{P}' = \mathcal{P}|_{P'}$  e  $\sigma' = \sigma|_{P' \times G}$ . Para cada trivialização local  $(V, \Psi)$  de  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  com  $V \cap X' \neq \emptyset$ , faça  $V' = V \cap X'$  e  $\Psi' = \Psi|_{(\mathcal{P}')^{-1}(V')}$ . Então  $\mathcal{P}' : P' \rightarrow X'$  é um  $G$ -fibrado principal sobre  $X'$ , chamado de **restrição** de  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  para  $X'$ , e cada  $(V', \Psi')$  é uma trivialização local para  $G \hookrightarrow P' \xrightarrow{\mathcal{P}'} X'$ .

Seja  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  um  $G$ -fibrado principal sobre  $X$  e fixe uma cobertura trivializante  $\{(V_j, \Psi_j)\}_{j \in J}$  de  $X$ . Escreva cada  $\Psi_j$  como  $\Psi_j(p) = (\mathcal{P}(p), \psi_j(p))$  para todo  $p \in \mathcal{P}^{-1}(V_j)$ ,

onde  $\psi_j(p \cdot g) = \psi_j(p)g$  para todo  $p \in \mathcal{P}^{-1}$  e  $g \in G$ . Suponha  $i, j \in J$  e  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ . Então, para qualquer  $x \in V_i \cap V_j$ ,  $\psi_j(p)(\psi_i(p))^{-1}$  tem o mesmo valor para todo  $p \in \mathcal{P}^{-1}(x)$ . Logo, podemos definir,

$$g_{ij} : V_i \cap V_j \rightarrow G \quad \text{por} \quad g(x) = (\psi_j(p))(\psi_i(p))^{-1} \quad (2.3.7)$$

para qualquer  $p \in \mathcal{P}^{-1}(x)$ . Estas aplicações são suaves e são chamadas **aplicações de transição** de  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  correspondendo a  $\{(V_j, \Psi_j)\}_{j \in J}$ . Elas satisfazem as seguintes condições

$$\begin{aligned} g_{ii}(x) &= e \\ g_{ij}(x) &= (g_{ji}(x))^{-1} \\ g_{kj}(x)g_{ji}(x) &= g_{ki}(x) \quad \text{condição de cociclo} \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

sempre que  $i, j, k \in J$  e  $V_i \cap V_j \cap V_k \neq \emptyset$ . Uma **seção transversal local** de  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  definida num aberto  $V \subseteq X$  é uma aplicação suave  $s : V \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V)$  que satisfaz  $\mathcal{P} \circ s = id_V$ , i.e., é uma seção suave de um elemento de cada fibra acima de  $V$ . Uma seção transversal  $s$  determina uma trivialização  $(V, \Psi)$ , onde  $\Psi : \mathcal{P}^{-1}(V) \rightarrow V \times G$  dada por  $\Psi(s(x) \cdot g) = (x, g)$ . Provemos isso.  $\Psi$  claramente é uma bijeção e  $\Psi(s(x) \cdot g) = (\mathcal{P}(s(x) \cdot g), \psi(s(x) \cdot g))$ , onde  $\psi(s(x) \cdot g) = g$ . Então

$$\psi((s(x) \cdot g) \cdot g') = \psi(s(x) \cdot gg') = gg' = \psi(s(x) \cdot g)g'$$

ou seja,  $\psi(p \cdot g') = \psi(p)g'$  para todo  $p \in \mathcal{P}^{-1}(V)$  e todo  $g' \in G$ . Precisamos somente mostrar que  $\Psi$  e  $\Psi^{-1}$  são contínuas. Agora  $\Psi(x, g) = s(x) \cdot g$ , que é a composição

$$(x, g) \mapsto (s(x), g) \mapsto s(x) \cdot g$$

portanto é contínua. Finalmente, a continuidade de  $\Psi$  vem da continuidade de  $\psi : \mathcal{P}^{-1}(V) \rightarrow G$ . Para todo  $p = s(x) \cdot g$  em  $\mathcal{P}^{-1}(V)$ ,  $\psi(p) = \psi(s(x) \cdot g) = g$ . Escolha uma trivialização  $(V', \Psi')$  em  $\mathcal{P}(p)$  com  $\Psi' = (\mathcal{P}, \psi')$ . Então

$$\psi'(p) = \psi'((s \circ \mathcal{P}) \cdot g) = ((\psi' \circ s \circ \mathcal{P})(p))g$$

então  $g = \psi'(p)((\psi' \circ s \circ \mathcal{P})(p))^{-1} = \psi(p)$ , de onde a continuidade de  $\psi$  segue. Reciprocamente, uma trivialização local determina uma seção transversal  $s : V \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V)$  definida por  $s(x) = \Psi^{-1}(x, e)$ . Esta correspondência entre trivializações e seções transversais é biunívoca.

Como exemplo concreto desses dois conceitos consideramos o fibrado  $Sp(1) \hookrightarrow S^7 \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{H}\mathbb{P}^1$  e sua cobertura trivializante  $\{(V_k, \Psi_k)\}_{k=1,2}$ . Assim,  $V_1 = \{x = [q^1, q^2] \in \mathbb{H}\mathbb{P}^1; q^1 \neq$



$0\}$ ,  $V_2 = \{x = [q^1, q^2] \in \mathbb{H}\mathbb{P}^1; q^2 \neq 0\}$ ,  $\psi_1(p) = \psi_1(q^1, q^2) = q^1/|q^1|$  e  $\psi_2(p) = \psi_2(q^1, q^2) = q^2/|q^2|$  então as aplicações de transição  $g_{12}, g_{21} : V_1 \cap V_2 \rightarrow Sp(1)$  são dadas por

$$\begin{aligned} g_{12}(x) &= g_{12}([q^1, q^2]) = (q^1/|q^1|)(q^2/|q^2|)^{-1}, \\ g_{21}(x) &= g_{21}([q^1, q^2]) = (q^2/|q^2|)(q^1/|q^1|)^{-1} \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

As inversas  $\Psi_k^{-1} : V_k \times Sp(1) \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V_k)$ ,  $k = 1, 2$  são dadas por

$$\begin{aligned} \Psi_1^{-1}([q^1, q^2], y) &= (|q^1|y, q^2(q^1/|q^1|)^{-1}y) \in S^7 \subseteq \mathbb{H}^2 \\ \Psi_2^{-1}([q^1, q^2], y) &= (q^1(q^2/|q^2|)^{-1}y, |q^2|y) \in S^7 \subseteq \mathbb{H}^2 \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Então as seções transversais (**canônicas**) associadas  $s_k : V_k \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V_k)$ ,  $k = 1, 2$  são

$$\begin{aligned} s_1(x) &= s_1([q^1, q^2]) = (|q^1|, q^2(q^1/|q^1|)^{-1}) \\ s_2(x) &= s_2([q^1, q^2]) = (q^1(q^2/|q^2|)^{-1}, |q^2|) \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Vale a pena observar que  $V_1$  e  $V_2$  também são as vizinhanças coordenadas em  $\mathbb{H}\mathbb{P}^1$  (chamadas  $U_1$  e  $U_2$  no exemplo #3 pág 9 e os difeomorfismos correspondentes  $\varphi_k : V_k \rightarrow \mathbb{H} = \mathbb{R}^4$  são

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \psi([q^1, q^2]) = q^2(q^1)^{-1} \\ \psi_2(x) &= \psi_2([q^1, q^2]) = q^1(q^2)^{-1} \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Suas inversas são  $\varphi_1^{-1}(q) = [1, q]$  e  $\varphi_2^{-1}(q) = [q, 1]$  então as funções de transição são

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(q) = q^{-1} = \varphi_1 \circ \varphi_1^{-1}(q) \quad (2.3.13)$$

para todo  $q \in \mathbb{H} - \{0\}$ . O mesmo vale para  $U(1) \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .

Sejam  $G \hookrightarrow P_1 \xrightarrow{\mathcal{P}_1} X_1$  e  $G \hookrightarrow P_2 \xrightarrow{\mathcal{P}_2} X_2$  dois  $G$ -fibrados principais sobre  $X_1$  e  $X_2$ , respectivamente. Por conveniência defina as ações de  $G$  sobre  $P_1$  e  $P_2$  pelo mesmo ponto “.”. Uma **aplicação fibrado (principal)** de  $P_1$  em  $P_2$  é uma aplicação suave  $f : P_1 \rightarrow P_2$  que comuta com a ação  $f(p \cdot g) = f(p) \cdot g$  para todo  $P_1$  e  $g \in G$ . Esta  $f$  leva cada fibra de  $\mathcal{P}_1$  difeomorficamente em alguma fibra de  $\mathcal{P}_2$  e consequentemente induz uma aplicação suave  $\bar{f} : X_1 \rightarrow X_2$  definida por  $\mathcal{P}_2 \circ f = \bar{f} \circ \mathcal{P}_1$ . Se  $X_2 = X_1 = X$ , então a aplicação fibrado  $f : P_1 \rightarrow P_2$  é uma **equivalência** se é um difeomorfismo e induz a aplicação identidade em  $X$ , i.e.,  $\bar{f} = id_X$ . Neste caso os fibrados  $G \hookrightarrow P_1 \xrightarrow{\mathcal{P}_1} X$  e  $G \hookrightarrow P_2 \xrightarrow{\mathcal{P}_2} X$  são **equivalentes**. Segue, portanto, que  $f^{-1} : P_2 \rightarrow P_1$  também é uma equivalência. Se  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  é um único  $G$ -fibrado sobre  $X$ , então uma equivalência  $f : P \rightarrow P$  é chamada **automorfismo** do fibrado. Um  $G$ -fibrado principal sobre  $X$  é dito ser **trivial** se é equivalente ao  $G$ -fibrado trivial  $G \hookrightarrow X \times G \rightarrow X$ . Este é o caso se, e somente se, o fibrado possui uma **trivialização global** e isto, por sua vez, é o caso se, e somente se, o fibrado possui uma **seção transversal global**  $s : X \rightarrow P$ . Determinar se um fibrado principal é ou não trivial não é uma tarefa fácil em geral. Qualquer  $G$ -fibrado principal sobre uma variedade  $X$  é necessariamente trivial.

Registramos em seguida versões suaves de alguns resultados feitos em um contexto topológico (i.e., para fibrados principais de classe  $C^0$ ) o primeiro e encontra no capítulo 4, seção 3 de [Nab10], o segundo está no capítulo 4, seção 4 de [Nab10]. Estender estes resultados para fibrados principais suaves está fora do escopo deste trabalho e pode ser encontrado na Seção 3.2 de [Nab11].

**Teorema 2.3.1. (Teorema de Reconstrução)** *Sejam  $X$  uma variedade diferenciável,  $G$  um grupo de Lie e  $\{V_j\}_{j \in J}$  uma cobertura aberta de  $X$ . Suponha que, para cada  $i, j \in J$  com  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ , existe uma aplicação suave  $g_{ij} : V_i \cap V_j \rightarrow G$  e que estas aplicações possuam as seguintes propriedades se  $V_i \cap V_j \cap V_k \neq \emptyset$ , então*

$$g_{kj}(x)g_{ji}(x) = g_{ki}(x) \quad (2.3.14)$$

*para todo  $x \in V_i \cap V_j \cap V_k$ . Então existe um  $G$ -fibrado principal sobre  $X$ , único a menos de equivalência, que possui os  $V_j$ ,  $j \in J$ , como vizinhanças trivializantes e  $g_{ij}$  como aplicações correspondentes de transição.*

**Teorema 2.3.2. (Teorema de Classificação):** *Seja  $G$  um grupo de Lie conexo. Então o conjunto de classes de equivalências dos  $G$ -fibrados principais sobre  $S^n$ ,  $n \geq 2$ , está em correspondência biunívoca com os elementos do grupo de homotopia  $\pi_{n-1}(G)$ .<sup>1</sup>*

Como exemplo, citamos os  $U(1)$ -fibrados principais sobre  $S^2$  que estão em correspondência biunívoca com os elementos de  $\pi_1(U(1)) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ . Analogamente, os  $Sp(1)$ -fibrados principais sobre  $S^4$  estão em correspondência biunívoca com os elementos de  $\pi_3(Sp(2)) \cong \pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$ .

Num fibrado principal suave  $G \hookrightarrow X \times G \xrightarrow{P} X$  qualquer as fibras  $\mathcal{P}^{-1}(x)$ ,  $x \in X$ , são subvariedades de  $P$  difeomorfas a  $G$ , então, para cada  $p \in P$ ,  $T_p(P)$  contém um subespaço isomorfo à álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  (todos os vetores tangentes em  $p$  às curvas suaves na fibra contendo  $p$ ). Chamamos este subespaço de **subespaço vertical** de  $T_p(P)$  e o denotamos por  $\text{Vert}_p(P)$ . Os elementos de  $\text{Vert}_p(P)$  são chamados **vetores verticais** em  $p$ . A ação  $\sigma$  de  $G$  sobre  $P$  proporciona uma maneira natural de identificar cada  $\text{Vert}_p(P)$  com  $\mathfrak{g}$ . Para isto, fixamos um elemento  $A \in \mathfrak{g}$  (pensado como um conjunto de matrizes). Associamos com  $A$  um campo vetorial  $A^\#$  em  $P$ , chamado **campo vetorial fundamental** em  $P$  determinado por  $A$ , da seguinte forma: Para cada  $p \in P$  a aplicação  $\sigma_p : G \rightarrow P$  definida por  $\sigma_p(g) = \sigma(p, g) = p \cdot g$  é suave e portanto possui uma derivada  $(\sigma_p)_*id$  na identidade. Então,

$$A^\# = (\sigma_p)_*id(A) = \left. \frac{d}{dt}(p \cdot \exp(tA)) \right|_{t=0} \quad (2.3.15)$$

A aplicação  $A \mapsto A^\#(p)$  é um isomorfismo de  $\mathfrak{g}$  sobre  $\text{Vert}_p(P)$ . De fato,  $A^\#(p)$  é o vetor velocidade da curva  $t \mapsto p \cdot \exp(tA)$  em  $t = 0$ .  $A^\#(p)$  é um vetor vertical em  $p$  para

<sup>1</sup> As definições de grupo de homotopia estão além do escopo deste trabalho, e recomendamos o capítulo 2 do livro texto usado [Nab10] para maiores detalhes.

cada  $A \in \mathfrak{g}$ . Logo se fixarmos  $p$ , a aplicação  $A \mapsto A^\#(p)$  é uma aplicação linear de  $\mathfrak{g}$  em  $\text{Vert}_p(P)$ . Como a ação  $\sigma$  é livre  $A \neq 0$  implica  $A^\#(p) \neq 0$ , i.e.,  $A \mapsto A^\#$  é injetiva. Finalmente, como  $\dim \mathfrak{g} = \dim \text{Vert}_p(P)$ , esta aplicação é, de fato, um isomorfismo. Além disso, para quaisquer  $A, B \in \mathfrak{g}$ ,

$$[A, B]^\# = [A^\#, B^\#] \quad (2.3.16)$$

(Teorema 5.8.8 [Nab10]) e, para todo  $g \in G$ ,

$$(\sigma_g)_*(A^\#) = (ad_{g^{-1}}(A))^\# \quad (2.3.17)$$

## 2.4 Conexões e Curvatura

Uma **conexão** em um fibrado principal  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  com ação  $\sigma$  é uma 1-forma  $\omega$  em  $P$  com valores em  $\mathfrak{g}$  que satisfaz

1.  $(\sigma_g)^*\omega = ad_{g^{-1}} \circ \omega$ , para todo  $g \in G$ , i.e., para todo  $g \in G$ ,  $p \in P$  e  $\mathbf{v} \in T_{p \cdot g^{-1}}(P)$ ,

$$\omega_p((\sigma_g)_{*p \cdot g^{-1}}(\mathbf{v})) = g^{-1}\omega_{p \cdot g^{-1}}(\mathbf{v})g \quad (2.4.1)$$

2.  $\omega(A^\#) = A$  para todo  $A \in \mathfrak{g}$  e  $p \in P$ ,

$$\omega_p(A^\#(p)) = A \quad (2.4.2)$$

Uma seção transversal  $s : V \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V)$  local do fibrado é chamada **calibre local** e o pullback  $\mathcal{A} = s^*\omega$  de  $\omega$  para  $V \subseteq X$  por  $s$  é chamado **potencial de calibre local**. Se  $\{(V_j, \Psi_j)\}_{j \in J}$  é uma cobertura trivializante de  $X$  e  $s_j : V_j \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V_j)$  é a seção transversal associada a  $(V_j, \Psi_j)$  então a família  $\{\mathcal{A}_j = s_j^*\omega\}$  de potenciais de calibre locais satisfazem

$$\mathcal{A}_j = ad_{g_{ij}^{-1}} \circ \mathcal{A}_i + g_{ij}^* \Theta \quad (2.4.3)$$

para todo  $i, j \in J$  com  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ , onde  $g_{ij}$  é a aplicação de transição correspondente e  $\Theta$  é a 1-forma de Cartan para  $G$  (Lema 5.9.2, [Nab10]). Reciprocamente, dada uma cobertura trivializante  $\{(V_j, \Psi_j)\}_{j \in J}$  de algum fibrado principal  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  e uma 1-forma  $\mathcal{A}_j$  em  $V_j$  com valores em  $\mathfrak{g}$ , para cada  $j \in J$  com  $\mathcal{A}_i$  e  $\mathcal{A}_j$  relacionados como em (2.4.3) sempre que  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ , existe uma única forma de conexão  $\omega$  em  $P$  tal que  $\mathcal{A}_j = s_j^*\omega$  para cada  $j \in J$  (Teorema 6.1.1 [Nab10]). As 1-formas  $g_{ij}^* \Theta$  em  $V_i \cap V_j$  são facilmente calculadas quando  $G$  é um grupo de Lie de matrizes, e assim, é possível mostrar que para cada  $x \in V_i \cap V_j$  e qualquer  $\mathbf{v} \in T_x(X)$ ,  $(g_{ij}^* \Theta)(\mathbf{v}) = (g_{ij(x)})^{-1} dg_{ij}(x)(\mathbf{v})$ , onde  $dg_{ij}$  é a diferencial ponto a ponto de  $g_{ij} : V_j \cap V_i \rightarrow G$ . Dessa forma (2.4.3) pode ser escrita como

$$\mathcal{A}_j = g_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i g_{ij} + g_{ij}^{-1} dg_{ij} \quad (2.4.4)$$

Dada uma forma de conexão  $\omega$  em  $P$  definimos, para cada  $p \in P$ , o **subespaço horizontal**  $\text{Hor}_p(P)$  de  $T_p(P)$  por

$$\text{Hor}_p(P) = \{\mathbf{v} \in T_p(p); \omega_p(\mathbf{v}) = 0\} \quad (2.4.5)$$

Então

$$T_p(P) = \text{Vert}_p(P) \oplus \text{Hor}_p(P)$$

de modo que todo  $\mathbf{v} \in T_p(P)$  pode ser escrito de maneira única como  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^V + \mathbf{v}^H$ , onde  $\mathbf{v}^V \in \text{Vert}_p(P)$  e  $\mathbf{v}^H \in \text{Hor}_p(P)$ . De maneira análoga, um campo vetorial  $\mathbf{V}$  em  $P$  pode ser escrito como  $\mathbf{V} = \mathbf{V}^V + \mathbf{V}^H$ , onde  $\mathbf{V}^V$  e  $\mathbf{V}^H$  são suaves e, para cada  $p \in P$ ,  $\mathbf{V}^V(p) \in \text{Vert}_p(P)$  e  $\mathbf{V}^H \in \text{Hor}_p(P)$ . Se  $p \in P$  e  $\mathcal{P}(p) = x$ , então  $\mathcal{P}_{*p}$  leva  $\text{Hor}_p(P)$  isomorficamente sobre  $T_x(X)$ . Além disso, os subespaços horizontais são invariantes em relação à ação de  $G$  sobre  $P$  no sentido de que

$$(\sigma_g)_{*p}(\text{Hor}_p(P)) = \text{Hor}_{p \cdot g}(P) \quad (2.4.6)$$

para todo  $p \in P$  e  $g \in G$ . Para vermos isso, observamos primeiramente que se  $\mathbf{v} \in \text{Hor}_p(P)$ , então por (2.4.1)

$$\omega_{p \cdot g}((\sigma_g)_{*p}(\mathbf{v})) = \omega_{p \cdot g}((\sigma_g)_{(p \cdot g) \cdot g^{-1}}(\mathbf{v})) = ad_{g^{-1}}(\omega_p(\mathbf{v})) = ad_{g^{-1}}(0) = 0$$

Então  $(\sigma_g)_{*p}(\text{Hor}_p(P)) \subseteq \text{Hor}_{p \cdot g}(P)$ . Seja agora  $\mathbf{w} \in \text{Hor}_{p \cdot g}(P)$  qualquer. Como  $(\sigma_g)_{*p}$  é um isomorfismo ( $\sigma_g$  é um difeomorfismo) existe um  $\mathbf{v} \in T_p(P)$  com  $(\sigma_g)_{*p}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ . Precisamos mostrar que  $\mathbf{v} \in \text{Hor}_p(P)$ . Ora,

$$\omega_p(\mathbf{v}) = \omega_p((\sigma_{g^{-1}})_{p \cdot g}(\mathbf{w})) = ad_g(\omega_{p \cdot g}(\mathbf{w})) = ad_g(0) = 0$$

e fica provada (2.4.6). Se a  $\dim X = n$  então a aplicação  $p \mapsto \text{Hor}_p(P)$  é um exemplo de uma distribuição suave de dimensão  $n$  em  $P$  e, além disso, qualquer distribuição suave de dimensão  $n$ ,  $p \mapsto \mathcal{D}(p)$  em  $P$  satisfaz  $T_p(P) \cong \mathcal{D}(p) \oplus \text{Vert}_p(P)$  e  $(\sigma_g)_{*p}(\mathcal{D}(p)) = \mathcal{D}(p \cdot g)$  para todo  $p \in P$  e  $g \in G$  é a distribuição de subespaços horizontais para alguma forma de conexão em  $P$ . Em geral, uma conexão em  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  é definida em qualquer uma das três maneiras equivalentes descritas acima: uma 1-forma com valores em  $\mathfrak{g}$ , uma coleção de potenciais de calibre locais, ou uma distribuição de subespaços horizontais.

Uma conexão permite fazer um “procedimento de levantamento de caminho” de  $X$  a  $P$  e conseqüentemente nos dá noções de “transporte paralelo” e “holonomia”. Mais especificamente, temos o seguinte teorema.

**Teorema 2.4.1.** *Sejam  $\mathcal{P} : P \rightarrow X$  um  $G$ -fibrado principal suave sobre  $X$  e  $\omega$  uma forma de conexão em  $P$ . Seja  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  uma curva suave em  $X$  com  $\alpha(0) = x_0$  e seja  $p_0 \in \mathcal{P}^{-1}(x_0)$ . Então existe uma única curva  $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow P$  tal que*

1.  $\tilde{\alpha}(0) = p_0$ ,
2.  $\mathcal{P} \circ \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t)$ , para todo  $t \in [0, 1]$ ,
3.  $\tilde{\alpha}'(t) \in \text{Hor}_{\tilde{\alpha}(t)}$ , para todo  $t \in [0, 1]$ .

A nível de visualização o Teorema 2.4.1 se resume na Figura 2.2, onde  $\mathcal{P} : P \rightarrow X$  é um  $G$ -fibrado principal,  $\dim G = 1$  e  $\dim X = 2$ .

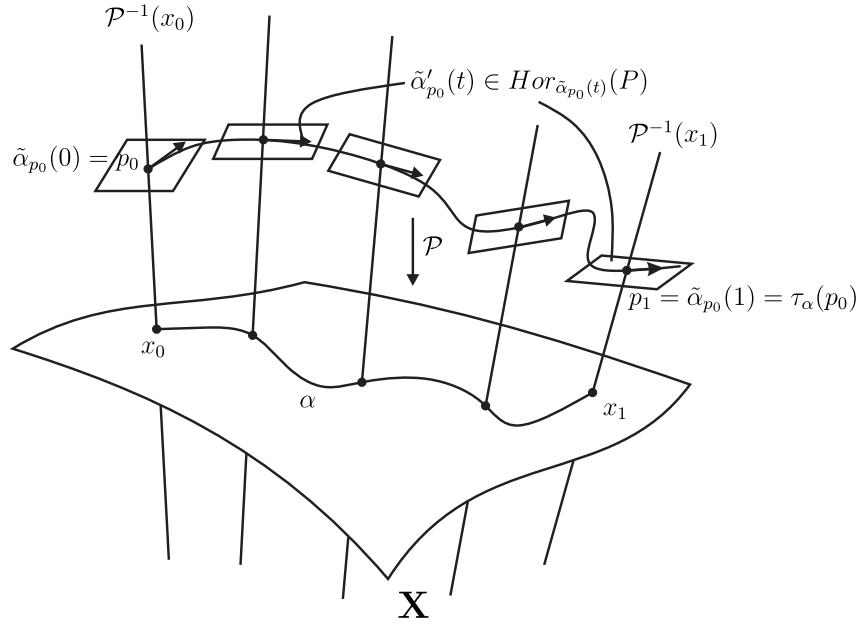


Figura 2.2 – Levantamento de caminho.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em particular, se  $\alpha(1) = x_1$ , então  $\tilde{\alpha}_{p_0}(1) \in \mathcal{P}^{-1}(x_1)$  e podemos definir uma aplicação

$$\tau_\alpha : \mathcal{P}^{-1}(x_0) \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(x_1) \quad (2.4.7)$$

chamada **transporte paralelo ao longo de  $\alpha$**  determinada por  $\omega$ , pondo  $\tau_\alpha(p_0) = \tilde{\alpha}_{p_0}(1)$  para cada  $p_0 \in \mathcal{P}^{-1}(x_0)$ . Caso  $x_0 = x_1$  (ou seja,  $\alpha$  seja um caminho fechado), então  $\tau_\alpha : \mathcal{P}^{-1}(x_0) \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(x_0)$ . Como  $G$  age transitivamente nas fibras de  $\mathcal{P}$ , para cada  $p_0 \in \mathcal{P}^{-1}(x_0)$  existe um único  $g \in G$  tal que  $\tau_\alpha(p_0) = p_0 \cdot g$ . Deixando  $p_0$  fixo e permitindo  $\alpha$  variar sobre todos os caminhos fechados suaves em  $x_0$  em  $X$  obtém-se um subconjunto  $\mathcal{H}(p_0) \subseteq G$  que consiste de todos os  $g \in G$  tais que  $p_0$  é trasladado paralelamente para  $p_0 \cdot g$  sobre algum caminho fechado em  $x_0$ . Mais ainda,  $\mathcal{H}(p_0)$  é um subgrupo de  $G$  chamado **grupo de holonomia** de  $\omega$  em  $p_0$ . Registramos alguns exemplos importantes de conexões em fibrados principais.

1.(Conexões flat em fibrados triviais) Sejam  $X$  uma variedade diferenciável,  $G$  um grupo de Lie de matrizes qualquer, e  $G \hookrightarrow X \times G \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  o  $G$ -fibrado trivial correspondente. Seja  $\Theta$  a 1-forma de Cartan em  $G$  e defina uma 1-forma em  $X \times G$  com valores em  $\mathfrak{g}$  pondo  $\omega = \pi^*\Theta$ , onde  $\pi : X \times G \rightarrow G$  é a projecção sobre  $G$ . Então  $\omega$  é uma forma de

conexão em  $X \times G$  cujo subespaço horizontal  $\text{Hor}_{(x,g)}(X \times G)$  em  $(x, g) \in X \times G$  é o espaço tangente à subvariedade  $X \times \{g\}$  em  $(x, g)$ .

2.(Conexão natural no fibrado de Hopf complexo) Consideramos o  $U(1)$ -fibrado principal

$$U(1) \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{CP}^1 \quad (2.4.8)$$

(Então estamos no caso  $n = 2$  de (2.3.5)). Consideramos  $S^3$  como uma subvariedade de  $\mathbb{C}^2$  consistindo de todos os pontos  $(z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2$  tais que  $|z^1|^2 + |z^2|^2 = 1$  e identificamos a álgebra de Lie de  $U(1)$  com a álgebra  $\text{Im}\mathbb{C}$  dos números complexos imaginários puros. Definimos uma 1-forma  $\tilde{\omega}$  em  $\mathbb{C}^2$  com valores em  $\text{Im}\mathbb{C}$  por

$$\tilde{\omega} = \mathbf{i} \text{Im}(\bar{z}^1 dz^1 + \bar{z}^2 dz^2) \quad (2.4.9)$$

Logo, para cada  $p = (p^1, p^2) \in \mathbb{C}^2$  e  $\mathbf{v} = (v^1, v^2) \in \mathbb{T}_p(\mathbb{C}^2) \cong T_{p^1}(\mathbb{C}) \times T_{p^2}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

$$\tilde{\omega} = \mathbf{i} \text{Im}(\bar{p}^1 v^1 + \bar{p}^2 v^2)$$

Agora seja  $\omega$  a restrição de  $\tilde{\omega}$  a  $S^3$ , ou seja,  $\omega = \iota^* \tilde{\omega}$ , onde  $\iota : S^3 \hookrightarrow \mathbb{C}^2$  é a aplicação inclusão. Então  $\omega$  é uma forma de conexão em  $U(1) \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{CP}^1$  (a prova disso será dada neste trabalho para o caso do fibrado quaternio no Capítulo 3). Para cada  $p = (p^1, p^2) \in S^3$ ,  $\text{Vert}_p(S^3)$  é o espaço tangente à fibra de  $\mathcal{P}$  contendo  $p$  e isto é um subespaço de dimensão 1 de  $T_p(S^3)$  pois essa fibra é difeomorfa à  $S^1$ . O subespaço horizontal  $\text{Hor}_p(S^3)$  determinado por  $\omega$  é a parte do complemento ortogonal real de  $\text{Vert}_p(S^3)$  em  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$  que vive em  $T_p(S^3)$  (a prova é idêntica ao caso quaternio e será dada neste trabalho). É possível calcular os potenciais de calibre  $s_k^* \omega$ ,  $k = 1, 2$ , para as seções transversais correspondentes às trivializações  $(V_k, \Psi_k)$ ,  $k = 1, 2$ . Vamos mostrar agora a relação que esta conexão tem com o monopólio de Dirac. Considere  $U(1) \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{CP}^1$  (aqui identificamos  $\mathbb{CP}^1$  com  $S^2$ ). O difeomorfismo

$$[z^1, z^2] \mapsto (z^1 \bar{z}^2 + \bar{z}^1 z^2, -\mathbf{i} \bar{z}^1 z^2, |z^1|^2 - |z^2|^2) \quad (2.4.10)$$

de  $\mathbb{CP}^1$  sobre  $S^2$  identifica  $V_1$  e  $V_2$  com  $U_N$  e  $U_S$ , respectivamente, e nestes conjuntos temos as seções transversais canônicas  $s_N : U_N \rightarrow \mathcal{P}_1^{-1}(U_N)$  e  $s_S : U_S \rightarrow \mathcal{P}_2^{-1}(U_S)$ . Descrevemos agora os potenciais  $\mathcal{A}_N = s_N^* \omega$  e  $\mathcal{A}_S = s_S^* \omega$  em termos de coordenadas esféricas  $\phi$  e  $\theta$  em  $S^2$ . Queremos  $(s_N \circ \varphi^{-1})^* \omega$  e  $(s_S \circ \varphi^{-1})^* \omega$ , onde  $\varphi$  é uma carta de coordenada esférica em  $S^2$  dada por

$$\varphi^{-1}(\phi, \theta) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \quad (2.4.11)$$

Façamos o cálculo escrevendo

$$\begin{aligned}
\omega &= \iota^* \tilde{\omega} = \iota^*(\mathbf{i} \operatorname{Im}(\bar{z}^1 dz^1 + \bar{z}^2 dz^2)) \\
&= \mathbf{i} \iota^*(\operatorname{Im}(\bar{z}^1 dz^1 + \bar{z}^2 dz^2)) \\
&= \mathbf{i} \iota^*(-x^2 dx^1 + x^1 dx^2 - x^4 dx^3 + x^3 dx^4)
\end{aligned}$$

onde  $z^1 = x^1 + x^2 \mathbf{i}$  e  $z^2 = x^3 + x^4 \mathbf{i}$ , assim,

$$(s_N \circ \varphi^{-1})^* \omega = \mathbf{i}(\iota \circ s_N \circ \varphi^{-1})^*(-x^2 dx^1 + x^1 dx^2 - x^4 dx^3 + x^3 dx^4) \quad (2.4.12)$$

Mas

$$\begin{aligned}
(\iota \circ s_N \circ \varphi^{-1})(\phi, \theta) &= \iota \circ s_N(\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \\
&= \left( \cos \frac{\phi}{2}, 0, \sin \frac{\phi}{2} \cos \theta, -\sin \frac{\phi}{2} \sin \theta \right)
\end{aligned}$$

Um cálculo mostra que

$$(s_N \circ \varphi^{-1})^* \omega = -\frac{1}{2} \mathbf{i} (1 - \cos \phi) d\theta \quad (2.4.13)$$

Analogamente,

$$(s_S \circ \varphi^{-1})^* \omega = \frac{1}{2} \mathbf{i} (1 + \cos \phi) d\theta \quad (2.4.14)$$

A **curvatura**  $\Omega$  de uma conexão  $\omega$  em  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  é sua derivada covariante exterior definida de modo que  $d\omega$  aja somente nas partes horizontais, i.e., para cada  $p \in P$  e todos  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(P)$  define-se

$$\Omega_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (d\omega)_p(\mathbf{v}^H, \mathbf{w}^H) \quad (2.4.15)$$

A **Equação Estrutural de Cartan** (Teorema 6.2.1, [Nab10]) afirma que

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \quad (2.4.16)$$

onde usamos  $[\omega, \eta]$  para denotar o produto exterior  $\omega \wedge_p \eta$  no qual  $\rho : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  é dado pelo colchete de Lie ( $\rho(A, B) = [A, B]$ ).

Se  $s : V \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V)$  é uma seção transversal local, então o pullback  $s^* \Omega$  é chamado **intensidade de campo local** e denotado por  $\mathcal{F}$ . Escrevendo  $\mathcal{A} = s^* \omega$  e  $\mathcal{F} = s^* \Omega$  a Equação estrutural de Cartan torna-se

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \frac{1}{2}[\mathcal{A}, \mathcal{A}] \quad (2.4.17)$$

Se  $s_j : V_j \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V_j)$  e  $s_i : V_i \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V_i)$  são duas seções transversais com  $V_j \cap V_i \neq \emptyset$  e se  $g_{ij} : V_j \cap V_i \rightarrow G$  é a função de transição que relaciona as trivializações correspondentes, então  $s_j(x) = s_i(x) \cdot g_{ij}(x)$  para cada  $x \in V_j \cap V_i$  e, como  $\mathcal{A}_j = g_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i g_{ij} + g_{ij}^{-1} dg_{ij}$ , temos

$$\mathcal{F}_j = g_{ij}^{-1} \mathcal{F}_i g_{ij} \quad (2.4.18)$$

Registramos alguns exemplos.

1. (*Conexões flat em fibrados triviais*) Sejam  $G \hookrightarrow X \times G \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  um fibrado trivial,  $\Theta$  a 1-forma de Cartan em  $G$  e  $\pi : X \times G \rightarrow G$  a projeção. Como no exemplo #1 pág. 36,  $\omega = \pi^*\Theta$  é uma forma de conexão em  $X \times G$ . As equações de Maurer-Cartan (2.2.10) nos dão

$$\begin{aligned} d\omega &= d(\pi^*\Theta) = \pi^*(d\Theta) \\ &= \pi^*\left(-\frac{1}{2}[\Theta, \Theta]\right) = -\frac{1}{2}[\pi^*\Theta, \pi^*\Theta] \\ &= -\frac{1}{2}[\omega, \omega] \end{aligned}$$

Logo

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0 \quad (2.4.19)$$

Portanto, estas conexões possuem esse nome “flat” por terem curvatura identicamente zero.

2. (*Conexão Natural no Fibrado Complexo de Hopf*) Conexões  $\omega$  em fibrados  $U(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  possuem propriedades especiais e fazemos uma discussão de algumas delas. Identificamos a álgebra de Lie  $\mathfrak{u}(1)$  com a álgebra  $\text{Im}\mathbb{C}$  dos complexos imaginários puros. Como  $\mathfrak{u}(1)$  tem dimensão 1, todos os colchetes se anulam de modo que a curvatura  $\Omega$  de qualquer conexão coincide com sua derivada exterior

$$\Omega = d\omega \quad (2.4.20)$$

Se  $s : V \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V)$  é qualquer seção transversal, então podemos escrever o potencial de calibre  $\mathcal{A} = s^*\omega$  e intensidade de campo  $\mathcal{F} = s^*\Omega$  como

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -i\mathbf{A} \\ \mathcal{F} &= d\mathcal{A} = -i d\mathbf{A} = -i\mathbf{F} \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

onde  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{F}$  são formas em  $V$  com valores reais (o sinal negativo é convencional). Se  $s_j : V_j \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V_j)$  e  $s_i : V_i \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V_i)$  são duas seções transversais com  $V_j \cap V_i \neq \emptyset$  e se  $g_{ij} : V_j \cap V_i \rightarrow U(1)$  é a função de transição correspondente, então

$$\mathcal{A}_j = g_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i g_{ij} + g_{ij}^{-1} dg_{ij} = \mathcal{A}_i + g_{ij}^{-1} dg_{ij} \quad (2.4.22)$$

$$\mathcal{F}_j = g_{ij}^{-1} \mathcal{F}_i g_{ij} = \mathcal{F}_i \quad (2.4.23)$$

em  $V_j \cap V_i$  pois  $U(1)$  é Abelian. Em particular, as intensidades de campo locais podem ser coladas juntas e dão uma *intensidade de campo*  $\mathcal{F}$  *definida globalmente* em  $X$ . Isto ocorre pois  $U(1)$  é Abelian, fato que geralmente não ocorre no caso em que o grupo que



age sobre  $P$  não é abeliano. Como  $g_{ij}$  é uma aplicação sobre  $U(1)$ , pode ser escrita como  $g_{ij}(x) = e^{i\Lambda(x)}$  para alguma função de valores reais  $\Lambda$  em  $V_j \cap V_i$ . Então

$$g_{ij}^{-1}dg_{ij} = e^{i\Lambda}e^{-i\Lambda}(-i d\Lambda) = -i d\Lambda$$

então  $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_i - i d\Lambda$ , ou seja,

$$\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_i + d\Lambda \quad (2.4.24)$$

a qual é a forma tradicional da relação entre dois “vetores potenciais”.

Agora voltemos para o caso da conexão natural  $\omega$  do fibrado de Hopf complexo  $U(1) \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{CP}^1$ . Identificamos  $\mathbb{CP}^1$  com  $S^2$  e obtemos  $U(1) \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{\mathcal{P}} S^2$  e os potenciais locais de calibre  $\mathcal{A}_N$  e  $\mathcal{A}_S$ , em coordenadas esféricas, são dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_N &= -\frac{1}{2}i(1 - \cos \phi)d\theta \\ \mathcal{A}_S &= \frac{1}{2}i(1 + \cos \phi)d\theta \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

Cada um possui a propriedade de que, em seus respectivos domínios, a intensidade de campo é dada por

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2}i \sin \phi d\phi \wedge d\theta \quad (2.4.26)$$

(basta calcular  $d\mathcal{A}_N$  e  $d\mathcal{A}_S$ ).

### 3 Potenciais BPST instantons e suas Intensidades de Campo

Neste capítulo faremos o cálculo dos chamados potenciais BPST instantons que na literatura física apareceram primeiramente como soluções das equações de Yang-Mills (ver Apêndice C para a derivação destas equações) no trabalho de Belavin, Polyakov, Schwartz e Tyupkin [BPST75] em 1975, os quais foram inicialmente chamados de **pseudopartículas**. Na literatura moderna, é mais comum referir-se aos mesmos e também à conexão natural  $\omega$  dos quais estes potenciais surgem e determinam unicamente (ver primeiro e segundo parágrafos da Seção 2.4 Capítulo 1) como **instantons**. Mostraremos que estes potenciais são soluções das equações de Yang-Mills, apresentando-as como soluções de equações relativamente mais simples no Capítulo 4. Encontramos estes potenciais por um caminho diferente, através do cálculo de uma 1-forma canônica de Cartan em  $Sp(2)$ , obtemos então a conexão natural  $\omega$  do fibrado de Hopf quatérnio  $S^3 \hookrightarrow S^7 \rightarrow S^4$  e através do pullback de  $\omega$  por seções transversais canônicas chegamos nos potenciais anunciados. Na última seção calculamos explicitamente as intensidades de campo associadas a estes potenciais através do Teorema 3.3.1 e da Equação Estrutural de Cartan. Usaremos principalmente [Nab10] como referência neste capítulo.

#### 3.1 Cálculo dos Potenciais BPST instantons

Uma 1-forma de Cartan para  $GL(n, \mathbb{H})$  pode ser identificada em cada  $g \in GL(n, \mathbb{H})$  com o produto de matrizes  $g^{-1}dq$  onde  $dq$  é dada por

$$dq = \begin{pmatrix} dq^{11} & \cdots & dq^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dq^{n1} & \cdots & dq^{nn} \end{pmatrix}$$

onde  $dq^{ij} = dx^{ij} + dy^{ij}\mathbf{i} + du^{ij}\mathbf{j} + dv^{ij}\mathbf{k}$ , para  $i, j = 1, \dots, n$ . A 1-forma de Cartan para  $H = Sp(n)$  é a restrição de  $\Theta_G(g) = g^{-1}dq$  a  $Sp(n)$  onde  $G = GL(2, \mathbb{H})$ , i.e.,  $\Theta_H(g) = \iota^*\Theta_G(g)$ , onde  $\iota : Sp(n) \hookrightarrow GL(n, \mathbb{H})$ . Façamos o cálculo da 1-forma de Cartan para  $Sp(2)$ . Para cada  $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G = GL(2, \mathbb{H})$ ,  $\Theta_G(g)$  é dada por  $g^{-1}dq$ . Agora se  $g \in Sp(2)$  então vale  $g^{-1} = \bar{g}^T$  e  $\bar{g}^T g = id$ . Em particular,  $\bar{\alpha}\alpha + \bar{\gamma}\gamma = 1$ . Com isso temos

$$\begin{aligned}
g^{-1}dq &= \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dq^{11} & dq^{12} \\ dq^{21} & dq^{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \bar{\alpha} dq^{11} + \bar{\gamma} dq^{21} & \bar{\alpha} dq^{12} + \bar{\gamma} dq^{22} \\ \bar{\beta} dq^{11} + \bar{\delta} dq^{21} & \bar{\beta} dq^{12} + \bar{\delta} dq^{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Qualquer elemento de  $T_g(Sp(2))$  pode ser escrito como  $\eta'(0)$ , onde  $\eta$  é uma curva suave em  $Sp(2)$  tal que  $\eta(0) = g$ . Ora,  $\iota_{*g}(\eta'(0)) = (\iota \circ \eta)'(0)$  onde

$$(\iota \circ \eta)'(t) = \begin{pmatrix} q^{11}((\iota \circ \eta)(t)) & q^{12}((\iota \circ \eta)(t)) \\ q^{21}((\iota \circ \eta)(t)) & q^{22}((\iota \circ \eta)(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{pmatrix}$$

com  $\bar{\alpha}(t)\alpha(t) + \bar{\gamma}(t)\gamma(t) = 1$  para todo  $t$ . Derivando em  $t = 0$  obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}'(0)\alpha(0) + \bar{\alpha}(0)\alpha'(0) + \bar{\gamma}'(0)\gamma(0) + \bar{\gamma}(0)\gamma'(0) &= 0 \\
\implies \bar{\alpha}'(0)\alpha + \bar{\alpha}\alpha'(0) + \bar{\gamma}'(0)\gamma + \bar{\gamma}\gamma'(0) &= 0 \\
\implies \overline{\bar{\alpha}\alpha'(0)} + \bar{\alpha}\alpha'(0) + \overline{\bar{\gamma}\gamma'(0)} + \bar{\gamma}\gamma'(0) &= 0 \\
\implies \text{Re}(\bar{\alpha}\alpha'(0) + \bar{\gamma}\gamma'(0)) &= 0
\end{aligned}$$

Além disso,  $\alpha'(0) = dq^{11}(\iota_{*g}(\eta'(0)))$  e  $\gamma'(0) = dq^{21}(\iota_{*g}(\eta'(0)))$ , logo,

$$\text{Re}(\bar{\alpha} dq^{11}(\iota_{*g}(\eta'(0))) + \bar{\gamma} dq^{21}(\iota_{*g}(\eta'(0)))) = \text{Re}(\bar{\alpha}\alpha'(0) + \bar{\gamma}\gamma'(0)) = 0$$

Concluimos que  $\bar{\alpha} dq^{11} + \bar{\gamma} dq^{21}$  é imaginário puro em  $\iota_{*g}(\eta'(0))$ . Mostramos, portanto, que a entrada-11 da 1-forma de Cartan de  $Sp(2)$  é a restrição de  $\text{Im}(\bar{q}^{11}dq^{11} + \bar{q}^{21}dq^{21})$  a  $Sp(2)$ , onde  $q^{11}(g) = \alpha$  e  $q^{21}(g) = \gamma$ . Uma abordagem análoga mostra que a entrada-11 da 1-forma de Cartan  $\Theta_G(g)$  de  $SU(2)$  é a restrição a  $SU(2)$  de  $\mathbf{i}$  vezes  $\text{Im}(\bar{z}^{11}dz^{11} + \bar{z}^{21}dz^{21})$ . Introduzindo-se coordenadas reais  $(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^{11}, y^{11}, x^{21}, y^{21})$  em  $\mathbb{C}^2$  obtemos uma 1-forma em  $\mathbb{R}^4$  que pode ser restrita a  $S^3$  e fazendo o pullback para  $S^2$  por meio das seções transversais do fibrado de Hopf complexo  $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$  caracterizamos o monopólio de Dirac. Analogamente, introduzimos coordenadas reais  $(x^1, \dots, x^8) = (x^{11}, \dots, v^{21})$  em  $\mathbb{H}^2$  e isso nos dá uma 1-forma sobre  $\mathbb{R}^8$  que pode ser restrita a  $S^7$ . Além disso, temos o fibrado de Hopf quaternário  $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$  que nos permite, através do pullback desta 1-forma para  $S^4$ , caracterizar as soluções BPST instantons das equações de Yang-Mills.

As contas deste trabalho são feitas todas em termos da estrutura dos números quaternários. Logo, identificamos  $S^7$  com o subconjunto de  $\mathbb{H}^2$  dado por  $S^7 = \{(q^1, q^2) \in \mathbb{H}^2; |q^1|^2 + |q^2|^2 = 1\}$ , e  $S^4$  com  $\mathbb{HP}^1$ .

A aplicação de Hopf será a projeção  $\mathcal{P} : S^7 \rightarrow \mathbb{HP}^1$ . Mais ainda, mostramos que

$$S^7 \cong \frac{Sp(2)}{Sp(1)}$$

de maneira explícita, a saber, o homeomorfismo  $\varphi : SP(2)/Sp(1) \rightarrow S^7$  é dado por

$$\varphi([g]) = (\alpha, \gamma), \quad \text{onde } g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sp(2)$$

Suprindo  $Sp(2)/Sp(1)$  com a estrutura diferenciável (definição pag. 27) que faz com que  $\varphi$  seja um difeomorfismo, podemos identificar  $S^7$  com  $Sp(2)/Sp(1)$  também como variedades diferenciáveis. Uma observação importante é que a entrada-11  $\text{Im}(\bar{q}^{11}dq^{11} + \bar{q}^{21}dq^{21})$  da 1-forma de Cartan para  $Sp(2)$  depende apenas das entradas-11 e -21 em  $Sp(2)$ , ou seja,  $\alpha$  e  $\gamma$ , e desta forma, o mesmo é válido para cada ponto da classe lateral  $[g] = gSp(1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta a \\ \gamma & \delta a \end{pmatrix}; a \in \mathbb{H}, |a| = 1 \right\}$ . Assim, esta 1-forma descende naturalmente para uma 1-forma no quociente  $Sp(2)/Sp(1)$ , e consequentemente, para  $S^7$  via  $\varphi$ .

Agora, colocamos na mesa a notação requerida de forma sucinta.  $S^7 = \{(q^1, q^2) \in \mathbb{H}^2; |q^1|^2 + |q^2|^2 = 1\}$  e  $\iota : S^7 \rightarrow \mathbb{H}^2$  é a aplicação inclusão. A ação usual à direita de  $Sp(1)$  em  $S^7$  é

$$\sigma((q^1, q^2), g) = (q^1, q^2) \cdot g = (q^1 g, q^2 g)$$

Identificamos a álgebra de Lie  $\mathfrak{sp}(1)$  de  $Sp(1)$  com  $\text{Im}\mathbb{H}$  (ver (2.2.14) e (2.2.16)) e o fibrado de Hopf quatérnio com  $Sp(1) \rightarrow S^7 \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{H}\mathbb{P}^1$ , onde  $\mathcal{P}(q^1, q^2) = [q^1, q^2] \in \mathbb{H}\mathbb{P}^1 \cong S^4$ . As trivializações  $(V_k, \Psi_k)$  para este fibrado são dadas por:

$$V_k = \{x = [q^1, q^2] \in \mathbb{H}\mathbb{P}^1; q^k \neq 0\}$$

e  $\Psi_k : \mathcal{P}^{-1}(V_k) \rightarrow V_k \times Sp(1)$  é dada por  $\Psi_k(p) = (\mathcal{P}(p), \psi_k(p))$ , onde

$$\psi_k(p) = |q^k|^{-1} q^k$$

As inversas  $\Phi_k = \Psi_k^{-1} : V_k \times Sp(1) \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V_k)$  são dadas por

$$\Phi_1([q^1, q^2], y) = (|q^1|y, q^2(q^1)^{-1}|q^1|y)$$

$$\Phi_2([q^1, q^2], y) = (q^1(q^2)^{-1}|q^2|y, |q^2|y)$$

então as funções de transição são  $g_{12}, g_{21} : V_1 \cap V_2 \rightarrow Sp(1)$  são

$$g_{12}(x) = g_{12}([q^1, q^2]) = |q^1|^{-1} q^1 (q^2)^{-1} |q^2| \quad \text{e} \quad g_{12}(x) = (g_{12}(x))^{-1}$$

as seções transversais canônicas  $s_k : V_k \rightarrow S^7$  associadas com essas trivializações são  $s_1(x) = s_1([q^1, q^2]) = (|q^1|, q^2(q^1)^{-1}|q^1|)$  e  $s_2(x) = s_2([q^1, q^2]) = (q^1(q^2)^{-1}|q^2|, |q^2|)$ . Aqui  $V_1$  e  $V_2$  são vizinhanças coordenadas em  $\mathbb{H}\mathbb{P}^1$ . Os difeomorfismos  $\varphi_k : V_k \rightarrow \mathbb{H} = \mathbb{R}^4$  correspondentes a estas vizinhanças são dados por  $\varphi_1([q^1, q^2]) = q^2(q^1)^{-1}$  e  $\varphi_1([q^1, q^2]) = q^1(q^2)^{-1}$  cujas inversas são  $\varphi_1^{-1}(q) = [1, q]$  e  $\varphi_2^{-1} = [q, 1]$  de tal modo que as aplicações de transição são

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(q) = q^{-1} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(q)$$

para todo  $q \in \mathbb{H} - \{0\}$ . Como em geral,  $[1, q]$  e  $[q, 1]$  não pertencem a  $S^7$  usaremos a seguinte descrição equivalente de  $\varphi_1^{-1}$  e  $\varphi_2^{-1}$ .

$$\begin{aligned} \varphi_1^{-1}(q) &= \left[ (1 + |q|^2)^{-\frac{1}{2}}, q(1 + |q|^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \\ \varphi_2^{-1}(q) &= \left[ q(1 + |q|^2)^{-\frac{1}{2}}, (1 + |q|^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Aplicando  $s_1$  a  $\varphi_1^{-1}(q)$  e  $s_2$  a  $\varphi_2^{-1}(q)$  obtemos

$$\begin{aligned}(s_1 \circ \varphi_1^{-1})(q) &= \frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}(1, q) \\ (s_1 \circ \varphi_2^{-1})(q) &= \frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}(q, 1)\end{aligned}\tag{3.1.2}$$

A 1-forma em  $S^7$  com valores em  $\text{Im}\mathbb{H}$  de nosso interesse é obtida da seguinte maneira. Defina  $\tilde{\omega}$  em  $\mathbb{H}^2$  pondo  $\tilde{\omega} = \text{Im}(\bar{q}^1 dq^1 + \bar{q}^2 dq^2)$  e então, tome  $\omega$  sendo a restrição de  $\tilde{\omega}$  a  $S^7$ , ou seja,  $\omega = \iota^*(\tilde{\omega})$ . Logo, para todo  $p \in S^7$  e todo  $\mathbf{v} \in T_p(S^7)$ ,

$$\omega_p(\mathbf{v}) = \tilde{\omega}_{\iota(p)}(\iota_{*p}(\mathbf{v}))$$

Deixando de escrever as inclusões e escrevendo  $p = (p^1, p^2) \in S^7$  e  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in T_p(S^7) \subseteq T_p(\mathbb{H}) = T_{p^1}(\mathbb{H}) \times T_{p^2}(\mathbb{H})$  segue que

$$\begin{aligned}\omega_p(\mathbf{v}) &= \text{Im}(\bar{q}^1 dq^1 + \bar{q}^2 dq^2)(p^1, p^2)(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \\ &= \text{Im}(\bar{p}^1 dq^1(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) + \bar{p}^2 dq^2(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2))\end{aligned}\tag{3.1.3}$$

Usamos o isomorfismo canônico (Exemplo 1 - pag.7) para identificar  $\mathcal{V}$  com  $T_p(\mathcal{V})$ . Voltando a (3.1.3) temos que pelo Teorema (2.2.1) podemos escrever  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_p$ , onde  $\mathbf{v}^i = \mathbf{v}(q^i)$ . Como  $dq^i(1)$  é o dual de  $\frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_p$  temos que  $dq^i(\mathbf{v}) = dq^i(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) = v^i$ , onde  $v^i$  é o elemento de  $\mathbb{H}$  que corresponde a  $\mathbf{v}^i \in T_p(S^7)$  através do isomorfismo canônico. Podemos, então, identificar  $\mathbf{v} \in T_p(S^7)$  com o par  $(v^1, v^2) \in \mathbb{H}$  de tal forma que (3.1.3) fica

$$\omega_p(\mathbf{v}) = \omega_{(p^1, p^2)}(v^1, v^2) = \text{Im}(\bar{p}^1 v^1 + \bar{p}^2 v^2)\tag{3.1.4}$$

Mostraremos que a 1-forma  $\omega_p(\mathbf{v}) = \text{Im}(\bar{p}^1 v^1 + \bar{p}^2 v^2)$  é uma conexão. Primeiro, afirmamos que se  $\mathbf{v} = (v^1, v^2) \in T_{p \cdot g^{-1}}(S^7)$  então  $(\sigma_g)_{*p \cdot g^{-1}}(\mathbf{v}) = (v^1 g, v^2 g)$ . De fato, consideramos o difeomorfismo  $\sigma_g : S^7 \rightarrow S^7$  dado por  $s_g(p) = p \cdot g$  e vemos que  $\sigma_g(p \cdot g^{-1}) = p$ . Então pelo Corolário 2.2.1 existe uma curva suave  $\alpha$  tal que

$$(\sigma_g)_{*p \cdot g^{-1}}(\mathbf{v}) = (\sigma_g)_{*p \cdot g^{-1}}(\alpha'(0)) = (\sigma_g \circ \alpha)'(0)$$

Mas  $(\sigma_g \circ \alpha)(t) = \sigma_g(\alpha(t)) = \alpha(t) \cdot g$ . Portanto,

$$(\sigma_g \circ \alpha)'(0) = \alpha'(0) \cdot g = \mathbf{v} \cdot g = (v^1, v^2) \cdot g = (v^1 g, v^2 g)$$

como queríamos. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\omega_{p \cdot g^{-1}}(\mathbf{v}) &= \text{Im}(\overline{(p^1 g^{-1})} v^1 + \overline{(p^2 g^{-1})} v^2) \\ &= \text{Im}(\overline{g^{-1}} \bar{p}^1 v^1 + \overline{g^{-1}} \bar{p}^2 v^2) \\ &= \text{Im}(g \bar{p}^1 v^1 + g \bar{p}^2 v^2)\end{aligned}$$

pois  $g \in Sp(1)$  implica que  $\overline{g^{-1}} = g$ . Logo,

$$ad_{g^{-1}}(\omega_{p \cdot g^{-1}}(\mathbf{v})) = g^{-1} \omega_{p \cdot g^{-1}}(\mathbf{v}) g = g^{-1} \text{Im}(g \bar{p}^1 v^1 + g \bar{p}^2 v^2) g$$

Agora, afirmamos que para todo  $g \in Sp(1)$  e  $h \in \mathbb{H}$ , tem-se  $g^{-1}(\text{Im } h)g = \text{Im}(g^{-1}hg)$ . Para isso, escrevemos  $g = g^0 + g^1 \mathbf{i} + g^2 \mathbf{j} + g^3 \mathbf{k}$  e  $h = x^0 + x^1 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} + x^3 \mathbf{k}$ . Então  $g^{-1} = \bar{g} = g^0 - g^1 \mathbf{i} - g^2 \mathbf{j} - g^3 \mathbf{k}$  e  $\text{Im } h = x^1 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} + x^3 \mathbf{k}$  implica que

$$\begin{aligned} \bar{g}(\text{Im } h)g &= [y^0 g^1 + y^1 g^0 + y^2 g^3 - y^3 g^2] \mathbf{i} \\ &\quad + [y^0 g^2 + y^2 g^1 + y^3 g^1 - y^1 g^3] \mathbf{j} \\ &\quad + [y^0 g^3 + y^2 g^0 + y^1 g^2 - y^2 g^1] \mathbf{k} \end{aligned}$$

onde  $y^0 = [g^1 x^1 + g^2 x^2 + g^3 x^3]$ ,  $y^1 = [g^0 x^1 - g^2 x^3 + g^3 x^2]$ ,  $y^2 = [g^0 x^2 - g^3 x^1 + g^1 x^3]$ ,  $y^3 = [g^0 x^3 - g^1 x^2 + g^2 x^1]$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} \text{Im}(\bar{g}hg) &= [\tilde{y}^0 g^1 + \tilde{y}^1 g^0 + \tilde{y}^2 g^3 - \tilde{y}^3 g^2] \mathbf{i} \\ &\quad + [\tilde{y}^0 g^2 + \tilde{y}^2 g^1 + \tilde{y}^3 g^1 - \tilde{y}^1 g^3] \mathbf{j} \\ &\quad + [\tilde{y}^0 g^3 + \tilde{y}^2 g^0 + \tilde{y}^1 g^2 - \tilde{y}^2 g^1] \mathbf{k} \end{aligned}$$

onde  $\tilde{y}^0 = [g^0 x^0 + g^1 x^1 + g^2 x^2 + g^3 x^3]$ ,  $\tilde{y}^1 = [g^0 x^1 - g^1 x^0 - g^2 x^3 + g^3 x^2]$ ,  $\tilde{y}^2 = [g^0 x^2 - g^2 x^0 - g^3 x^1 + g^1 x^3]$ ,  $\tilde{y}^3 = [g^0 x^3 - g^3 x^0 - g^1 x^2 + g^2 x^1]$ . Comparando-se ambas igualdades, vê-se que, de fato, vale  $g^{-1}(\text{Im } h)g = \text{Im}(g^{-1}hg)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} ad_{g^{-1}}(\omega_{p \cdot g^{-1}}(\mathbf{v})) &= g^{-1} \text{Im}(g \bar{p}^1 v^1 + g \bar{p}^2 v^2) g \\ &= \text{Im}(\bar{p}^1 v^1 g + \bar{p}^2 v^2 g) \\ &= \omega_p((\sigma_g)_{*p \cdot g^{-1}}(\mathbf{v})) \end{aligned}$$

E temos (1). Para mostrar que  $\omega$  age trivialmente em campos vetoriais fundamentais, tomamos  $A \in \mathfrak{sp}(1) = \text{Im } \mathbb{H}$  e  $A^\# = \sigma(A)$  o campo vetorial fundamental em  $S^7$  determinado por  $A$ . Então  $\omega(A^\#)$  é uma função definida em  $S^7$  com valores em  $\text{Im } \mathbb{H}$  por  $\omega(A^\#)(p) = \omega_p(A^\#(p))$ , para cada  $p \in S^7$ . Ora,  $A^\#$  é o vetor velocidade em  $t = 0$  da curva  $\alpha_p(t) = (p^1 \cdot \exp(tA), p^2 \cdot \exp(tA))$  e por (2.2.5) isto é apenas  $(p^1 A, p^2 A)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \omega(A^\#) &= \text{Im}(\bar{p}^1 p^1 A + \bar{p}^2 p^2 A) \\ &= \text{Im}((|p^1|^2 + |p^2|^2)A) \\ &= \text{Im}(A) = A \end{aligned}$$

pois  $p \in S^7$  e  $A \in \text{Im } \mathbb{H}$ .

Nosso interesse em conexões foi originalmente motivado pela sugestão de que esta estrutura proporciona um procedimento de levantamento de caminho único pelo qual pode-se obter o registro da evolução do estado interno de uma partícula (e.g. fase, isospin) na medida que atravessa o campo estabelecido por uma outra partícula (e.g., campo eletromagnético de um monopólo).

A distribuição horizontal de vetores proporciona uma maneira geométrica de visualizarmos uma conexão em um fibrado. Vejamos como isso se dá no caso de (3.2.4), ou seja, numa conexão do fibrado de Hopf  $Sp(1) \rightarrow S^7 \rightarrow \mathbb{H}P^1$ . É fácil verificar que para  $p, v \in \mathbb{H} = \mathbb{R}^4$  o produto interno usual real é dado por  $\langle p, v \rangle = \text{Re}(\bar{p}v)$ , e disso, podemos concluir que para  $(p^1, p^2), (v^1, v^2) \in \mathbb{H}^2 = \mathbb{R}^8$ , o produto interno usual real é  $\langle (p^1, p^2), (v^1, v^2) \rangle = \text{Re}(\bar{p}^1 v^1 + \bar{p}^2 v^2)$ . Agora, suponha  $p = (p^1, p^2) \in S^7 \subseteq \mathbb{H}^2$  e considere  $\text{Vert}_p(S^7)$ . Este é o espaço tangente à fibra de  $\mathcal{P}$  contendo  $(p^1, p^2)$ . Como a fibra é  $\{(p^1 g, p^2 g); g \in Sp(1)\}$ , então

$$\text{Vert}_{(p^1, p^2)}(S^7) = \{(p^1 a, p^2 a); a \in \mathfrak{sp}(1) = \text{Im}\mathbb{H}\}$$

Calculemos agora o complemento ortogonal de  $\text{Vert}_{(p^1, p^2)}(S^7)$  em  $\mathbb{R}^8$ . Ora,  $\mathbf{v} = (v^1, v^2)$  pertence ao complemento ortogonal se, e somente se, para todo  $a \in \text{Im}\mathbb{H}$ , tem-se que  $\langle (p^1 a, p^2 a), (v^1, v^2) \rangle = 0$ . Pelo que dissemos anteriormente este é o caso se, e somente se,  $\text{Re}(\bar{p}^1 a v^1 + \bar{p}^2 a v^2) = 0$ . Mostraremos que este é o caso se, e somente se,  $\bar{p}^1 v^1 + \bar{p}^2 v^2$  é real, ou seja, se, e somente se,  $\text{Im}(\bar{p}^1 v^1 + \bar{p}^2 v^2) = 0$ . De fato, suponha que  $\text{Re}(\bar{p}^1 a v^1 + \bar{p}^2 a v^2) = 0$ , então do fato de  $a \in \text{Im}(\mathbb{H})$  e pelas propriedades de números quatérnios (ver Apêndice A) temos

$$\begin{aligned} \overline{p^1 a v^1} + \overline{p^2 a v^2} &= \bar{a} \bar{p}^1 v^1 + \bar{a} \bar{p}^2 v^2 \\ &= \bar{a}(\bar{p}^1 v^1 + \bar{p}^2 v^2) \end{aligned}$$

mas  $0 = \text{Re}(\bar{a}(\bar{p}^1 v^1 + \bar{p}^2 v^2)) = \langle a, \bar{p}^1 v^1 + \bar{p}^2 v^2 \rangle$  para todo  $a \in \text{Im}\mathbb{H}$ , logo  $\text{Im}(\bar{p}^1 v^1 + \bar{p}^2 v^2) = 0$ . A recíproca é óbvia. Logo  $\tilde{\omega}_p(\mathbf{v}) = \text{Im}(\bar{p}^1 v^1 + \bar{p}^2 v^2) = 0$ , e temos que o núcleo de  $\tilde{\omega}$  é exatamente o complemento ortogonal de  $\text{Vert}_p(S^7)$  em  $\mathbb{R}^8$ . Como a conexão  $\omega$  do fibrado de Hopf é apenas a restrição de  $\tilde{\omega}$  à  $S^7$ , seus subespaços horizontais são

$$\text{Hor}_p(S^7) = T_p(S^7) \cap \ker \tilde{\omega}_p \quad (3.1.5)$$

Com isso vemos que  $\omega$  surge, na verdade, de maneira natural da estrutura do fibrado de Hopf (e do modo que  $S^7$  se encontra em  $\mathbb{R}^8$ ) e portanto é chamada de **conexão natural** de  $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$ .

Estamos interessados, particularmente, no pullback desta conexão para  $\mathbb{H}P^1 \cong S^4$  por meio das seções transversais do fibrado de Hopf  $Sp(1) \rightarrow S^7 \rightarrow \mathbb{H}P^1$ . A fim de obtermos coordenadas para podermos escrever explicitamente nossos objetos, faremos o pullback para  $\mathbb{H}$  por meio das cartas em  $\mathbb{H}P^1$ .

**Proposição 3.1.1.** *Para cada  $q \in \mathbb{H}$ , cada  $\mathbf{v} \in T_q(\mathbb{H})$  e cada  $k = 1, 2$ , tem-se que*

$$\left( (s_k \circ \varphi_k^{-1})^* \omega \right)_q(\mathbf{v}) = (s_k^* \omega)_{\varphi_k^{-1}(q)} \left( (\varphi_k^{-1})_* \mathbf{v} \right) \quad (3.1.6)$$

**Demonstração.** Segue da definição de pullback (2.1.20) e (2.1.25) que

$$\begin{aligned}
\left( (s_k \circ \varphi_k^{-1})^* \omega \right)_q (\mathbf{v}) &= \left( (\varphi_k^{-1})^* \circ (\sigma_k)^* \omega \right)_q (\mathbf{v}) \\
&= (\varphi_k^{-1})^* \left( ((s_k)^* \omega) \right)_q (\mathbf{v}) \\
&= (s_k^* \omega)_{\varphi_k^{-1}(q)} \left( (\varphi_k^{-1})_{*q} (\mathbf{v}) \right)
\end{aligned}$$

como queríamos. ■

Em outras palavras o resultado acima diz que se usarmos o difeomorfismo  $\varphi_k^{-1}$  para identificar  $\mathbb{H}$  com  $V_k$  de modo que  $q$  é identificado com  $\varphi_k^{-1}(q)$  e  $\mathbf{v}$  é identificado com  $(\varphi_k^{-1})_{*q}(\mathbf{v})$ , então  $(s_k \circ \varphi_k)^* \omega$  é identificado com  $s_k^* \omega$ . Façamos o cálculo de  $(s_k \circ \varphi_k)^* \omega$ . Afim de facilitar a escrita, usaremos  $s = s_1 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V_1)$ . Para cada  $q \in \mathbb{H}$ , temos que  $s(q) = (1 + |q|^2)^{-\frac{1}{2}}(1, q)$ . Cada  $\mathbf{v}_q \in T_q(\mathbb{H})$  identificaremos com  $\left. \frac{d}{dt}(q + vt) \right|_{t=0}$  para  $v \in \mathbb{H}$  correspondendo a  $\mathbf{v}_q$  através do isomorfismo canônico. Assim,

$$\begin{aligned}
s_{*q}(\mathbf{v}_q) &= s_{*q} \left( \left. \frac{d}{dt}(q + vt) \right|_{t=0} \right) = \left. \frac{d}{dt} s((q + vt)) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + |q + vt|^2}} (1, q + vt) \right) \right|_p
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
|q + vt|^2 &= (q + vt)(\overline{q + vt}) = (q + vt)(\bar{q} + \bar{v}t) \\
&= q\bar{q} + q\bar{v}t + v\bar{q}t + v\bar{v}t^2 \\
&= |q|^2 + (q\bar{v} + \bar{q}v)t + |v|^2 t^2 \\
&= |q|^2 + 2\operatorname{Re}(q\bar{v})t + |v|^2 t^2 \\
&= |q|^2 + 2\operatorname{Re}(v\bar{q})t + |v|^2 t^2
\end{aligned}$$

Então  $\left. \frac{d}{dt}(1 + |q + vt|^2) \right|_{t=0} = \operatorname{Re}(v\bar{q})$ , daí

$$\left. \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + |q + vt|^2}} \right) \right|_{t=0} = -\frac{1}{2} \frac{2\operatorname{Re}(v\bar{q})}{(1 + |q|^2)^{3/2}} = -\frac{\operatorname{Re}(v\bar{q})}{(1 + |q|^2)^{3/2}}$$

Com isso, temos que

$$\left. \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + |q + vt|^2}} (q + vt) \right) \right|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{1 + |q|^2}} v - \frac{\operatorname{Re}(v\bar{q})}{(1 + |q|^2)^{3/2}} q$$

Podemos concluir que

$$s_{*q}(\mathbf{v}_q) = \left( -\frac{\operatorname{Re}(v\bar{q})}{(1 + |q|^2)^{3/2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + |q|^2}} v - \frac{\operatorname{Re}(v\bar{q})}{(1 + |q|^2)^{3/2}} q \right) \quad (3.1.7)$$

Agora,  $(s^* \omega)_q(\mathbf{v}_q) = \omega_{s(q)}(s_{*q}(\mathbf{v}_q))$  cujo cálculo é feito como segue:



$$\begin{aligned}
(\bar{q}^1 dq^1)_{s(q)}(s_{*q}(\mathbf{v}_q)) &= \bar{q}^1(s(q)) dq^1(s_{*q}(\mathbf{v}_q)) \\
&= \left( \frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}} \right) \left( -\frac{\operatorname{Re}(v\bar{q})}{(1+|q|^2)^{3/2}} \right) \\
&= -\frac{\operatorname{Re}(v\bar{q})}{(1+|q|^2)^2}
\end{aligned}$$

quanto ao outro termo,

$$\begin{aligned}
(\bar{q}^2 dq^2)_{s(q)}(s_{*q}(\mathbf{v}_q)) &= \bar{q}^2(s(q)) dq^2(s_{*q}(\mathbf{v}_q)) \\
&= \left( \frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}} \bar{q} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}} v - \frac{\operatorname{Re}(v\bar{q})}{(1+|q|^2)^{3/2}} q \right) \\
&= \frac{1}{1+|q|^2} \bar{q} v - \frac{\operatorname{Re}(v\bar{q})|q|^2}{(1+|q|^2)^2}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\omega_{s(q)}(s_{*q}(\mathbf{v}_q)) = (\operatorname{Im}(\bar{q}^1 dq^1 + \bar{q}^2 dq^2))_{s(q)}(s_{*q}(\mathbf{v}_q)) = \frac{\operatorname{Im}(\bar{q}v)}{1+|q|^2}$$

Consequentemente,

$$\left( (s_1 \circ \varphi_1^{-1})^* \omega \right)_q(\mathbf{v}) = \frac{\operatorname{Im}(\bar{q}v)}{1+|q|^2} = \operatorname{Im} \left( \frac{\bar{q}}{1+|q|^2} v \right) \quad (3.1.8)$$

Em (3.1.8),  $q$  refere-se a qualquer ponto fixado em  $\mathbb{H}$  e  $v$  é o quatérnio que corresponde a algum vetor fixo  $\mathbf{v}_q \in T_p(\mathbb{H})$ . Considerando  $q$  como sendo uma função coordenada padrão ( $q = x + y\mathbf{i} + u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$ ) em  $\mathbb{H}$ , então também serão funções em  $\mathbb{H}$ ,  $\bar{q}$  e  $|q|^2$ . Escrevendo  $dq = dx + dy\mathbf{i} + du\mathbf{j} + dv\mathbf{k}$  como usualmente viemos fazendo temos que  $dq(\mathbf{v}_q) = v$  e portanto (3.1.8) pode ser escrito como

$$(s_1 \circ \varphi_1^{-1})^* \omega = \operatorname{Im} \left( \frac{\bar{q}}{1+|q|^2} dq \right) \quad (3.1.9)$$

Semelhantemente,

$$(s_2 \circ \varphi_2^{-1})^* \omega = \operatorname{Im} \left( \frac{\bar{q}}{1+|q|^2} dq \right) \quad (3.1.10)$$

Essas duas expressões são concisas e elegantes, entretanto não expressam exatamente o que está se passando. A fim de eliminar qualquer dúvida vamos escrever em detalhes cada uma dessas equações. Para  $p \in V_1$  e cada  $\mathbf{X} \in T_p(S^4)$ , (3.1.9) e Proposição 3.1.1 implica

$$(s_1^* \omega)_p \mathbf{X} = \left( (s_1 \circ \varphi_1^{-1})^* \omega \right)_{\varphi_1(p)} ((\varphi_1)_* \mathbf{X}) = \operatorname{Im} \left( \frac{\overline{\varphi_1(p)} v}{1+|\varphi_1(p)|^2} \right)$$

onde  $v = dq((\varphi_1)_* \mathbf{X})$ . De modo análogo, Para  $p \in V_2$  e cada  $\mathbf{X} \in T_p(S^4)$ ,

$$(s_2^* \omega)_p \mathbf{X} = \left( (s_2 \circ \varphi_2^{-1})^* \omega \right)_{\varphi_2(p)} ((\varphi_2)_* p \mathbf{X}) = \text{Im} \left( \frac{\overline{\varphi_2(p)} w}{1 + |\varphi_2(p)|^2} \right)$$

onde  $w = dq((\varphi_2)_* p \mathbf{X})$ .

Observe que em  $\mathbb{H} - \{0\}$

$$\text{Im} \left( \frac{\bar{q}}{1 + |q|^2} dq \right) = \text{Im} \left( \frac{q^{-1}|q|^2}{1 + |q|^2} dq \right) = \frac{|q|^2}{1 + |q|^2} \text{Im}(q^{-1} dq) \quad (3.1.11)$$

**Proposição 3.1.2.** *Identifique  $GL(1, \mathbb{H})$  com  $\mathbb{H} - \{0\}$  e  $Sp(1)$  com os quatérnios unitários em  $\mathbb{H} - \{0\}$ . Defina  $g : \mathbb{H} - \{0\} \rightarrow Sp(1)$  pondo  $g(q) = \frac{q}{|q|}$  e considere  $\iota : Sp(1) \hookrightarrow \mathbb{H} - \{0\}$  a aplicação inclusão de modo que  $\Theta = \iota^*(\text{Im}(q^{-1} dq))$  é a 1-forma de Cartan para  $Sp(1)$ . Então  $g^* \Theta = \text{Im}(q^{-1} dq)$ .*

**Demonstração.** Selecione  $q \in \mathbb{H} - \{0\}$  e  $\mathbf{v} \in T_q(\mathbb{H} - \{0\})$  quaisquer. Então por (2.1.25)

$$(g^* \Theta)_q(\mathbf{v}) = (\iota \circ g)^* \text{Im}(q^{-1} dq)_q(\mathbf{v})$$

Como  $g = id$  em  $Sp(1)$ , segue que  $g^* \Theta = \text{Im}(q^{-1} dq)$ , como queríamos. ■

O que esses cálculos (e a Proposição 3.1.1) revelam é que  $s_1^* \omega$  e  $s_2^* \omega$  são formalmente idênticos quando  $s_1^* \omega$  é expressa nas coordenadas  $(V_1, \varphi_1)$  e  $s_2^* \omega$  é expressa nas coordenadas  $(V_2, \varphi_2)$ . Mostraremos como esses dois pullbacks se comportam em um mesmo sistema de coordenadas. Para isso, fixe  $p \in V_1 \cap V_2$  e  $\mathbf{X} \in T_p(S^4)$ . Suponha que  $p = \varphi_1^{-1}(q)$  para  $q \in \varphi_1(V_1 \cap V_2) = \mathbb{H} - \{0\}$ . Como  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(q) = q^{-1}$ , então  $p = \varphi_2^{-1}(q^{-1})$ . Em seguida, suponha  $\mathbf{X} = (\varphi_1^{-1})_* q(\mathbf{v}_q)$ . Como  $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})_* q = (\varphi_2)_* p \circ (\varphi_1^{-1})_* q$ , então  $\mathbf{X} = (\varphi_2^{-1})_* q^{-1} \left( (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})_* q(\mathbf{v}_q) \right)$ . Logo,

$$(s_1^* \omega)_p \mathbf{X} = \left( (s_1 \circ \varphi_1^{-1})^* \omega \right)_q (\mathbf{v}_q) = \text{Im} \left( \frac{\bar{q} v}{1 + |q|^2} \right) \quad (3.1.12)$$

onde  $dq(\mathbf{v}_q) = v$  e

$$\begin{aligned} (s_2^* \omega)_p \mathbf{X} &= \left( (s_2 \circ \varphi_2^{-1})^* \omega \right)_{q^{-1}} \left( (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})_* q(\mathbf{v}_q) \right) \\ &= \text{Im} \left( \frac{\overline{q^{-1}} w}{1 + |q^{-1}|^2} \right) \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

onde  $dq((\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})_* q(\mathbf{v}_q)) = w$ . Calculamos esta última expressão, primeiro notando que

$$\frac{\overline{q^{-1}} w}{1 + |q^{-1}|^2} = \frac{q}{1 + |q|^2}$$

Em seguida,  $\mathbf{v}_q = \frac{d}{dt}(q + vt) \Big|_{t=0}$  implica que

$$\begin{aligned} (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})_* q(\mathbf{v}_q) &= \frac{d}{dt}((\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(q + vt)) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(q + vt)^{-1} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\bar{q} + \bar{v}t}{|\bar{q} + \bar{v}t|^2} \right) \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

temos que  $|q + vt|^2 = |q|^2 + 2\text{Re}(v\bar{q})t + |v|^2t^2$  então

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt}(q + vt)^{-1} \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \left( \frac{\bar{q} + \bar{v}t}{|\bar{q} + \bar{v}t|^2} \right) \right|_{t=0} = \left( \frac{\bar{v}(|q + vt|^2) - (\bar{q} + \bar{v}t)(2\text{Re}(v\bar{q}) + 2|q|^2t^2)}{|q + vt|^4} \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\bar{v}|q|^2}{|q|^4} - \frac{2\text{Re}(v\bar{q})\bar{q}}{|q|^4} = \frac{\bar{v}}{|q|^2} - \frac{2\text{Re}(v\bar{q})\bar{q}}{|q|^4} \end{aligned}$$

E isto nos dá

$$(s_2^*\omega)_p \mathbf{X} = \text{Im} \left( \frac{q\bar{v}}{|q|^2(1 + |q|^2)} \right) \quad (3.1.14)$$

onde  $p = \varphi_1^{-1}(q)$ ,  $\mathbf{X} = (\varphi_1^{-1})_{*q}(\mathbf{v}_q)$  e  $dq(\mathbf{v}_q) = v$ .

Portanto, (3.1.12) e (3.1.13) expressam  $s_1^*\omega$  e  $s_2^*\omega$  em termos das coordenadas em  $V_1 \cap V_2$  dadas por  $\varphi_1 : V_1 \cap V_2 \rightarrow \mathbb{H} - \{0\}$ . Escrevemos então

$$(s_1^*\omega)_p \mathbf{X} = \text{Im} \left( \frac{\bar{q}}{1 + |q|^2} dq(\mathbf{v}_q) \right) \quad (3.1.15)$$

$$(s_2^*\omega)_p \mathbf{X} = \text{Im} \left( \frac{q}{|q|^2(1 + |q|^2)} d\bar{q}(\mathbf{v}_q) \right) \quad (3.1.16)$$

onde  $p = \varphi_1^{-1}(q)$ ,  $\mathbf{X} = (\varphi_1^{-1})_{*q}(\mathbf{v}_q)$ . Em mais detalhes, temos para cada  $p \in V_1 \cap V_2$  e cada  $\mathbf{X} \in T_p(S^4)$

$$\begin{aligned} (s_2^*\omega)_p \mathbf{X} &= \text{Im} \left( \frac{\overline{\varphi_2(p)}w}{1 + |\varphi_2(p)|^2} \right) \\ &= \text{Im} \left( \frac{\varphi_1(p)\bar{v}}{|\varphi_1(p)|^2(1 + |\varphi_1(p)|^2)} \right) \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

onde  $dq((\varphi_1)_{*p}\mathbf{X}) = v$  e  $dq((\varphi_2)_{*p}\mathbf{X}) = w$ .

Chegamos no nosso objetivo de fazer o pullback para  $S^4$  da entrada-11 da 1-forma de Cartan de  $Sp(2)$  através das seções transversais do fibrado de Hopf. O que acabamos de encontrar é um BPST instanton sobre o qual teremos mais a falar daqui a pouco. Vale a pena observar que fazendo  $n = 0$  e  $\lambda = 1$  em (3.2.9) obtemos (3.1.9).

## 3.2 Cálculo da Intensidade de Campo dos BPST instantons

Desejamos calcular com detalhes algumas fórmulas clássicas que faremos uso nesta seção e nos demais capítulos.

Considere uma 1-forma  $\omega = \omega^1 \mathbf{i} + \omega^2 \mathbf{j} + \omega^3 \mathbf{k}$  em  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$  com valores em  $\text{Im}\mathbb{H}$  (lembre-se que estamos identificando  $\mathfrak{sp}(1)$  com  $\text{Im}\mathbb{H}$ ). Como cada  $\omega^i$  é uma 1-forma em  $\mathbb{H}$  com valores em  $\mathbb{R}$  podemos escrevê-las em coordenadas usuais como  $\omega^i = \omega_0^i dq^0 + \omega_1^i dq^1 + \omega_2^i dq^2 + \omega_3^i dq^3 = \omega_\alpha^i dq^\alpha$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Logo,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} &= (\omega_\alpha^1 dq^\alpha) \mathbf{i} + (\omega_\alpha^2 dq^\alpha) \mathbf{j} + (\omega_\alpha^3 dq^\alpha) \mathbf{k} \\
&= (\omega_0^1 dq^0 \mathbf{i} + \omega_0^2 dq^0 \mathbf{j} + \omega_0^3 dq^0 \mathbf{k}) + \dots + (\omega_3^1 dq^3 \mathbf{i} + \omega_3^2 dq^3 \mathbf{j} + \omega_3^3 dq^3 \mathbf{k}) \\
&= (\omega_0^1 \mathbf{i} + \omega_0^2 \mathbf{j} + \omega_0^3 \mathbf{k}) dq^0 + \dots + (\omega_3^1 \mathbf{i} + \omega_3^2 \mathbf{j} + \omega_3^3 \mathbf{k}) dq^3
\end{aligned}$$

Dessa forma, podemos escrever  $\boldsymbol{\omega}$  como

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0 dq^0 + \omega_1 dq^1 + \omega_2 dq^2 + \omega_3 dq^3 \quad (3.2.1)$$

onde cada  $\omega_\alpha$  é uma função definida em  $\mathbb{H}$  com valores em  $\text{Im}\mathbb{H}$  dada por

$$\omega_\alpha = \omega_\alpha^1 \mathbf{i} + \omega_\alpha^2 \mathbf{j} + \omega_\alpha^3 \mathbf{k}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad (3.2.2)$$

Calculamos agora  $[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}] = 4(\boldsymbol{\omega}^2 \wedge \boldsymbol{\omega}^3 \mathbf{i} + \boldsymbol{\omega}^3 \wedge \boldsymbol{\omega}^1 \mathbf{j} + \boldsymbol{\omega}^1 \wedge \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{k})$  (ver exemplo 1 - pag. 18) nestes termos observando que  $\boldsymbol{\omega}^2 \wedge \boldsymbol{\omega}^3 = (\omega_\alpha^2 dq^\alpha) \wedge (\omega_\beta^3 dq^\beta) = \omega_\alpha^2 \omega_\beta^3 dq^\alpha \wedge dq^\beta$  e que o mesmo se dá para  $\boldsymbol{\omega}^3 \wedge \boldsymbol{\omega}^1$  e  $\boldsymbol{\omega}^1 \wedge \boldsymbol{\omega}^2$ . Logo,

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}] &= 4 \left( \omega_\alpha^2 \omega_\beta^3 dq^\alpha \wedge dq^\beta \mathbf{i} + \omega_\alpha^3 \omega_\beta^1 dq^\alpha \wedge dq^\beta \mathbf{j} \right. \\
&\quad \left. + \omega_\alpha^1 \omega_\beta^2 dq^\alpha \wedge dq^\beta \mathbf{k} \right) \quad (3.2.3)
\end{aligned}$$

Para reescrevemos esta última expressão, faremos o cálculo do produto em  $\mathbb{H}$ :

$$\begin{aligned}
\omega_\alpha \omega_\beta &= (\omega_\alpha^1 \mathbf{i} + \omega_\alpha^2 \mathbf{j} + \omega_\alpha^3 \mathbf{k}) (\omega_\beta^1 \mathbf{i} + \omega_\beta^2 \mathbf{j} + \omega_\beta^3 \mathbf{k}) \\
&= -(\omega_\alpha^1 \omega_\beta^1 + \omega_\alpha^2 \omega_\beta^2 + \omega_\alpha^3 \omega_\beta^3) + (\omega_\alpha^2 \omega_\beta^3 - \omega_\alpha^3 \omega_\beta^2) \mathbf{i} \\
&\quad + (\omega_\alpha^1 \omega_\beta^3 - \omega_\alpha^3 \omega_\beta^1) \mathbf{j} + (\omega_\alpha^1 \omega_\beta^2 - \omega_\alpha^2 \omega_\beta^1) \mathbf{k}
\end{aligned}$$

. Em seguida, note que

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha, \beta=0}^3 &= (\omega_\alpha^1 \omega_\beta^1 + \omega_\alpha^2 \omega_\beta^2 + \omega_\alpha^3 \omega_\beta^3) dq^\alpha \wedge dq^\beta = 0 \\
\sum_{\alpha, \beta=0}^3 &= (\omega_\alpha^2 \omega_\beta^3 - \omega_\alpha^3 \omega_\beta^2) dq^\alpha \wedge dq^\beta = 2 \sum_{\alpha, \beta=0}^3 \omega_\alpha^2 \omega_\beta^3 dq^\alpha \wedge dq^\beta
\end{aligned}$$

Analogamente, o mesmo vale para  $\omega_\alpha^1 \omega_\beta^3 - \omega_\alpha^3 \omega_\beta^1$  e  $\omega_\alpha^1 \omega_\beta^2 - \omega_\alpha^2 \omega_\beta^1$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\omega_\alpha \omega_\beta dq^\alpha \wedge dq^\beta &= 2\omega_\alpha^2 \omega_\beta^3 dq^\alpha \wedge dq^\beta \mathbf{i} + 2\omega_\alpha^3 \omega_\beta^1 dq^\alpha \wedge dq^\beta \mathbf{j} \\
&\quad + 2\omega_\alpha^1 \omega_\beta^2 dq^\alpha \wedge dq^\beta \mathbf{k} \\
&= \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}]
\end{aligned}$$

Finalmente, observamos que  $[\omega_\alpha, \omega_\beta] = \omega_\alpha \omega_\beta - \omega_\beta \omega_\alpha$  nos dá

$$\begin{aligned}
[\omega_\alpha, \omega_\beta] dq^\alpha \wedge dq^\beta &= \omega_\alpha \omega_\beta dq^\alpha \wedge dq^\beta - \omega_\beta \omega_\alpha dq^\beta \wedge dq^\alpha \\
&= 2\omega_\alpha \omega_\beta dq^\alpha \wedge dq^\beta
\end{aligned}$$

Concluimos, então, que para uma 1-forma  $\omega$  em  $\mathbb{R}^4$  com valores em  $\text{Im}\mathbb{H}$  dada por (3.2.1) e (3.2.2), temos que

$$\frac{1}{2}[\omega, \omega] = \omega_\alpha \omega_\beta dq^\alpha \wedge dq^\beta = \frac{1}{2}[\omega_\alpha, \omega_\beta] dq^\alpha \wedge dq^\beta \quad (3.2.4)$$

Agora, para a mesma 1-forma  $\omega$  em  $\mathbb{R}^4$  com valores em  $\text{Im}\mathbb{H}$  iremos calcular a derivada exterior  $d\omega = d\omega^1\mathbf{i} + d\omega^2\mathbf{j} + d\omega^3\mathbf{k}$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} d\omega &= d(\omega_\alpha^1 dq^\alpha)\mathbf{i} + d(\omega_\alpha^2 dq^\alpha)\mathbf{j} + d(\omega_\alpha^3 dq^\alpha)\mathbf{k} \\ &= \left( d(\omega_0^1 dq^0)\mathbf{i} + d(\omega_0^2 dq^0)\mathbf{j} + d(\omega_0^3 dq^0)\mathbf{k} + \dots \right. \\ &\quad \left. + d(\omega_3^1 dq^3)\mathbf{i} + d(\omega_3^2 dq^3)\mathbf{j} + d(\omega_3^3 dq^3)\mathbf{k} \right) \\ &= (d\omega_0^1 \wedge dq^0\mathbf{i} + d\omega_0^2 \wedge dq^0\mathbf{j} + d\omega_0^3 \wedge dq^0\mathbf{k})dq^0 + \dots \\ &\quad + d\omega_3^1 \wedge dq^3\mathbf{i} + d\omega_3^2 \wedge dq^3\mathbf{j} + d\omega_3^3 \wedge dq^3\mathbf{k} \\ &= (d\omega_0^1\mathbf{i} + d\omega_0^2\mathbf{j} + d\omega_0^3\mathbf{k}) \wedge dq^0 + \dots \\ &\quad + (d\omega_3^1\mathbf{i} + d\omega_3^2\mathbf{j} + d\omega_3^3\mathbf{k}) \wedge dq^3 \\ &= d\omega_0 \wedge dq^0 + \dots + d\omega_3 \wedge dq^3 \end{aligned}$$

Logo,

$$d\omega = d\omega_\beta \wedge dq^\beta \quad (3.2.5)$$

Além disso,  $d\omega_\beta = d\omega_\beta^1\mathbf{i} + d\omega_\beta^2\mathbf{j} + d\omega_\beta^3\mathbf{k} = (\partial_\alpha \omega_\beta^1 dq^\alpha)\mathbf{i} + (\partial_\alpha \omega_\beta^2 dq^\alpha)\mathbf{j} + (\partial_\alpha \omega_\beta^3 dq^\alpha)\mathbf{k}$ , onde,  $\partial/\partial q^\alpha = \partial_\alpha$ . Desse modo,  $d\omega_\beta = (\partial_\alpha \omega_\beta^1\mathbf{i} + \partial_\alpha \omega_\beta^2\mathbf{j} + \partial_\alpha \omega_\beta^3\mathbf{k}) = \partial_\alpha \omega_\beta dq^\alpha$  (derivada componente a componente de  $\omega_\beta$ ) logo temos

$$d\omega = \partial_\alpha \omega_\beta dq^\alpha \wedge dq^\beta = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \omega_\beta - \partial_\beta \omega_\alpha) dq^\alpha \wedge dq^\beta \quad (3.2.6)$$

De acordo com (2.4.16) a curvatura de  $\omega$  é dada por

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \omega_\beta - \partial_\beta \omega_\alpha + [\omega_\alpha, \omega_\beta]) dq^\alpha \wedge dq^\beta \quad (3.2.7)$$

**Teorema 3.2.1.** *Seja  $f(q) = f^0(q) + f^1(q)\mathbf{i} + f^2(q)\mathbf{j} + f^3(q)\mathbf{k}$  uma função definida em  $\mathbb{H}$  suave qualquer. Considere a 1-forma  $\omega = \text{Im}(f(q)dq)$  em  $\mathbb{R}^4$  com valores em  $\text{Im}\mathbb{H}$ , onde  $dq = dq^0 + dq^1\mathbf{i} + dq^2\mathbf{j} + dq^3\mathbf{k}$ . Nestas condições tem-se que  $\omega = \text{Im}(f(q)dq) = \omega_\alpha dq^\alpha$  onde  $\omega_0 = f^0\mathbf{i} + f^2\mathbf{j} + f^3\mathbf{k}$ ,  $\omega_1 = f^0\mathbf{i} + f^3\mathbf{j} - f^2\mathbf{k}$ ,  $\omega_2 = -f^3\mathbf{i} + f^0\mathbf{j} + f^1\mathbf{k}$  e  $\omega_3 = f^2\mathbf{i} - f^1\mathbf{j} + f^0\mathbf{k}$ . Além disso, vale*

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = \text{Im}(df \wedge dq + f(q)dq \wedge f(q)dq) \quad (3.2.8)$$

**Demonstração.** Primeiro temos por (A.0.3) que

$$\begin{aligned}
f(q)dq &= [f^0(q)dq^0 + f^1(q)dq^1 + f^2(q)dq^2 + f^3(q)dq^3] \\
&+ [f^0(q)dq^1 + f^1(q)dq^0 + f^2(q)dq^3 - f^3(q)dq^2]\mathbf{i} \\
&+ [f^0(q)dq^2 + f^2(q)dq^0 + f^3(q)dq^1 - f^1(q)dq^3]\mathbf{j} \\
&+ [f^0(q)dq^3 + f^3(q)dq^0 + f^2(q)dq^1 - f^1(q)dq^2]\mathbf{k} \\
&= (f^0(q) + f^1(q)\mathbf{i} + f^2(q)\mathbf{j} + f^3(q)\mathbf{k})dq^0 \\
&+ (f^1(q) + f^0(q)\mathbf{i} + f^3(q)\mathbf{j} - f^2(q)\mathbf{k})dq^1 \\
&+ (f^2(q) - f^3(q)\mathbf{i} + f^0(q)\mathbf{j} + f^1(q)\mathbf{k})dq^2 \\
&+ (f^3(q) + f^2(q)\mathbf{i} - f^1(q)\mathbf{j} + f^0(q)\mathbf{k})dq^3
\end{aligned}$$

Logo vemos que

$$\begin{aligned}
\omega = \text{Im}(f(q)dq) &= (f^1(q)\mathbf{i} + f^2(q)\mathbf{j} + f^3(q)\mathbf{k})dq^0 \\
&+ (f^0(q)\mathbf{i} + f^3(q)\mathbf{j} - f^2(q)\mathbf{k})dq^1 \\
&+ (-f^3(q)\mathbf{i} + f^0(q)\mathbf{j} + f^1(q)\mathbf{k})dq^2 \\
&+ (+f^2(q)\mathbf{i} - f^1(q)\mathbf{j} + f^0(q)\mathbf{k})dq^3 \\
&= \omega_0 dq^0 + \omega_1 dq^1 + \omega_2 dq^2 + \omega_3 dq^3
\end{aligned}$$

Agora,  $df = df^0 df^1 \mathbf{i} + df^2 \mathbf{j} + df^3 \mathbf{k} = (\partial_\alpha f^0 dq^\alpha) + (\partial_\alpha f^1 dq^\alpha)\mathbf{i} + (\partial_\alpha f^2 dq^\alpha)\mathbf{j} + (\partial_\alpha f^3 dq^\alpha)\mathbf{k}$ .

Disso e de (A.0.2) seque que

$$\begin{aligned}
df \wedge dq &= (\partial_\alpha f^0 dq^\alpha) + (\partial_\alpha f^1 dq^\alpha)\mathbf{i} + (\partial_\alpha f^2 dq^\alpha)\mathbf{j} + (\partial_\alpha f^3 dq^\alpha)\mathbf{k} \\
&\wedge (dq^0 + dq^1 \mathbf{i} + dq^2 \mathbf{j} + dq^3 \mathbf{k}) \\
&= (\partial_\alpha f^0 dq^\alpha) \wedge dq^0 + (\partial_\alpha f^0 dq^\alpha) \wedge dq^1 \mathbf{i} + (\partial_\alpha f^0 dq^\alpha) \wedge dq^2 \mathbf{j} + (\partial_\alpha f^0 dq^\alpha) \wedge dq^3 \mathbf{k} \\
&+ (\partial_\alpha f^1 dq^\alpha) \wedge dq^0 \mathbf{i} - (\partial_\alpha f^1 dq^\alpha) \wedge dq^1 + (\partial_\alpha f^1 dq^\alpha) \wedge dq^2 \mathbf{k} + (\partial_\alpha f^1 dq^\alpha) \wedge dq^3 \mathbf{j} \\
&+ (\partial_\alpha f^2 dq^\alpha) \wedge dq^0 \mathbf{j} - (\partial_\alpha f^2 dq^\alpha) \wedge dq^1 \mathbf{k} + (\partial_\alpha f^2 dq^\alpha) \wedge dq^2 + (\partial_\alpha f^2 dq^\alpha) \wedge dq^3 \mathbf{i} \\
&+ (\partial_\alpha f^3 dq^\alpha) \wedge dq^0 \mathbf{k} + \mathbf{k}(\partial_\alpha f^3 dq^\alpha) \wedge dq^1 \mathbf{j} - (\partial_\alpha f^3 dq^\alpha) \wedge dq^2 \mathbf{i} + (\partial_\alpha f^3 dq^\alpha) \wedge dq^3
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\text{Im}(df \wedge dq) &= \left( \partial_0 f^0 dq^0 \wedge dq^1 + \partial_2 f^0 dq^2 \wedge dq^1 + \partial_3 f^0 dq^3 \wedge dq^1 + \partial_1 f^1 dq^1 \wedge dq^0 \right. \\
&\quad + \partial_2 f^1 dq^2 \wedge dq^0 + \partial_3 f^1 dq^3 \wedge dq^0 + \partial_0 f^2 dq^0 \wedge dq^2 - \partial_1 f^2 dq^1 \wedge dq^2 \\
&\quad \left. - \partial_3 f^2 dq^3 \wedge dq^2 + \partial_0 f^2 dq^0 \wedge dq^3 + \partial_1 f^2 dq^1 \wedge dq^3 - \partial_2 f^2 dq^2 \wedge dq^3 \right) \mathbf{i} \\
&+ \left( \partial_0 f^0 dq^0 \wedge dq^2 + \partial_1 f^0 dq^1 \wedge dq^2 + \partial_3 f^0 dq^3 \wedge dq^2 - \partial_0 f^1 dq^0 \wedge dq^3 \right. \\
&\quad - \partial_1 f^1 dq^1 \wedge dq^3 - \partial_2 f^1 dq^2 \wedge dq^3 + \partial_1 f^2 dq^1 \wedge dq^0 - \partial_2 f^2 dq^2 \wedge dq^0 \\
&\quad \left. - \partial_3 f^2 dq^3 \wedge dq^0 + \partial_0 f^3 dq^0 \wedge dq^1 + \partial_2 f^2 dq^2 \wedge dq^1 - \partial_3 f^3 dq^3 \wedge dq^1 \right) \mathbf{j} \\
&+ \left( \partial_0 f^0 dq^0 \wedge dq^3 + \partial_1 f^0 dq^1 \wedge dq^3 + \partial_2 f^0 dq^2 \wedge dq^3 + \partial_0 f^1 dq^0 \wedge dq^2 \right. \\
&\quad + \partial_1 f^1 dq^1 \wedge dq^2 + \partial_3 f^1 dq^3 \wedge dq^2 - \partial_0 f^2 dq^0 \wedge dq^1 - \partial_2 f^2 dq^2 \wedge dq^1 \\
&\quad \left. - \partial_3 f^2 dq^3 \wedge dq^1 + \partial_1 f^3 dq^1 \wedge dq^0 + \partial_2 f^3 dq^2 \wedge dq^0 - \partial_3 f^3 dq^3 \wedge dq^0 \right) \mathbf{k} \\
&= \left( (\partial_0 f^0 - \partial_1 f^1) dq^0 \wedge dq^1 + (-\partial_2 f^0 - \partial_1 f^3) dq^1 \wedge dq^2 \right. \\
&\quad + (\partial_1 f^2 - \partial_3 f^0) dq^1 \wedge dq^3 + (-\partial_2 f^1 - \partial_0 f^3) dq^0 \wedge dq^2 \\
&\quad \left. + (\partial_0 f^2 - \partial_3 f^1) dq^0 \wedge dq^3 + (-\partial_2 f^2 - \partial_3 f^2) dq^2 \wedge dq^3 \right) \mathbf{i} \\
&+ \left( (\partial_0 f^0 - \partial_2 f^2) dq^0 \wedge dq^2 + (-\partial_1 f^0 - \partial_2 f^3) dq^1 \wedge dq^2 \right. \\
&\quad + (-\partial_3 f^0 - \partial_2 f^1) dq^2 \wedge dq^3 + (\partial_0 f^1 - \partial_3 f^2) dq^0 \wedge dq^3 \\
&\quad \left. + (\partial_1 f^1 - \partial_3 f^2) dq^1 \wedge dq^3 + (-\partial_1 f^2 - \partial_0 f^3) dq^0 \wedge dq^1 \right) \mathbf{j} \\
&+ \left( (\partial_0 f^0 - \partial_3 f^3) dq^0 \wedge dq^3 + (\partial_1 f^0 + \partial_3 f^2) dq^1 \wedge dq^3 \right. \\
&\quad + (\partial_2 f^0 - \partial_3 f^1) dq^2 \wedge dq^3 + (\partial_0 f^1 - \partial_2 f^3) dq^0 \wedge dq^2 \\
&\quad \left. + (-\partial_1 f^1 - \partial_2 f^2) dq^1 \wedge dq^2 + (-\partial_0 f^2 - \partial_1 f^3) dq^0 \wedge dq^1 \right) \mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Por outro lado temos de (3.2.6) que

$$\begin{aligned}
d\omega &= \frac{1}{2} \left( (\partial_0\omega_1 - \partial_1\omega_0)dq^0 \wedge dq^1 + (\partial_0\omega_2 - \partial_2\omega_0)dq^0 \wedge dq^2 + (\partial_0\omega_3 - \partial_3\omega_0)dq^0 \wedge dq^3 \right. \\
&\quad + (\partial_1\omega_0 - \partial_0\omega_1)dq^1 \wedge dq^0 + (\partial_1\omega_2 - \partial_2\omega_1)dq^1 \wedge dq^2 + (\partial_1\omega_3 - \partial_3\omega_1)dq^1 \wedge dq^3 \\
&\quad + (\partial_2\omega_0 - \partial_0\omega_2)dq^2 \wedge dq^0 + (\partial_2\omega_1 - \partial_1\omega_2)dq^2 \wedge dq^1 + (\partial_2\omega_3 - \partial_3\omega_2)dq^2 \wedge dq^3 \\
&\quad \left. + (\partial_3\omega_0 - \partial_0\omega_3)dq^3 \wedge dq^0 + (\partial_3\omega_1 - \partial_1\omega_3)dq^3 \wedge dq^1 + (\partial_3\omega_2 - \partial_2\omega_3)dq^3 \wedge dq^2 \right) \\
&= (\partial_0\omega_1 - \partial_1\omega_0)dq^0 \wedge dq^1 + (\partial_0\omega_2 - \partial_2\omega_0)dq^0 \wedge dq^2 + (\partial_0\omega_3 - \partial_3\omega_0)dq^0 \wedge dq^3 \\
&\quad + (\partial_1\omega_2 - \partial_2\omega_1)dq^1 \wedge dq^2 + (\partial_1\omega_3 - \partial_3\omega_1)dq^1 \wedge dq^3 + (\partial_2\omega_3 - \partial_3\omega_2)dq^2 \wedge dq^3 \\
&= \partial_0(f^0\mathbf{i} + f^3\mathbf{j} - f^2\mathbf{k}) - \partial_1(f^1\mathbf{i} + f^2\mathbf{j} + f^3\mathbf{k})dq^0 \wedge dq^1 \\
&\quad + \partial_0(-f^3\mathbf{i} + f^0\mathbf{j} + f^1\mathbf{k}) - \partial_2(f^1\mathbf{i} + f^2\mathbf{j} + f^3\mathbf{k})dq^0 \wedge dq^2 \\
&\quad + \partial_0(f^2\mathbf{i} - f^1\mathbf{j} + f^0\mathbf{k}) - \partial_3(f^1\mathbf{i} + f^2\mathbf{j} + f^3\mathbf{k})dq^0 \wedge dq^3 \\
&\quad + \partial_1(-f^3\mathbf{i} + f^0\mathbf{j} + f^1\mathbf{k}) - \partial_2(f^0\mathbf{i} + f^3\mathbf{j} - f^2\mathbf{k})dq^1 \wedge dq^2 \\
&\quad + \partial_1(f^2\mathbf{i} - f^1\mathbf{j} + f^0\mathbf{k}) - \partial_3(f^0\mathbf{i} + f^3\mathbf{j} - f^2\mathbf{k})dq^1 \wedge dq^3 \\
&\quad + \partial_2(f^2\mathbf{i} - f^1\mathbf{j} + f^0\mathbf{k}) - \partial_3(-f^3\mathbf{i} + f^0\mathbf{j} + f^1\mathbf{k})dq^2 \wedge dq^3 \\
&= \left( (\partial_0f^0 - \partial_1f^1)dq^0 \wedge dq^1 + (-\partial_2f^0 - \partial_1f^3)dq^1 \wedge dq^2 \right. \\
&\quad + (\partial_1f^2 - \partial_3f^0)dq^1 \wedge dq^3 + (-\partial_2f^1 - \partial_0f^3)dq^0 \wedge dq^2 \\
&\quad \left. + (\partial_0f^2 - \partial_3f^1)dq^0 \wedge dq^3 + (-\partial_2f^2 - \partial_3f^2)dq^2 \wedge dq^3 \right) \mathbf{i} \\
&+ \left( (\partial_0f^0 - \partial_2f^2)dq^0 \wedge dq^2 + (-\partial_1f^0 - \partial_2f^3)dq^1 \wedge dq^2 \right. \\
&\quad + (-\partial_3f^0 - \partial_2f^1)dq^2 \wedge dq^3 + (\partial_0f^1 - \partial_3f^2)dq^0 \wedge dq^3 \\
&\quad \left. + (\partial_1f^1 - \partial_3f^2)dq^1 \wedge dq^3 + (-\partial_1f^2 - \partial_0f^3)dq^0 \wedge dq^1 \right) \mathbf{j} \\
&+ \left( (\partial_0f^0 - \partial_3f^3)dq^0 \wedge dq^3 + (\partial_1f^0 + \partial_3f^2)dq^1 \wedge dq^3 \right. \\
&\quad + (\partial_2f^0 - \partial_3f^1)dq^2 \wedge dq^3 + (\partial_0f^1 - \partial_2f^3)dq^0 \wedge dq^2 \\
&\quad \left. + (-\partial_1f^1 - \partial_2f^2)dq^1 \wedge dq^2 + (-\partial_0f^2 - \partial_1f^3)dq^0 \wedge dq^1 \right) \mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$d\omega = \text{Im}(df \wedge dq)$$

Passemos, então, para a segunda parte a ser provada. Chamemos

$$\begin{aligned}
f(q)dq &= [f^0(q)dq^0 + f^1(q)dq^1 + f^2(q)dq^2 + f^3(q)dq^3] \\
&\quad + [f^0(q)dq^1 + f^1(q)dq^0 + f^2(q)dq^3 - f^3(q)dq^2]\mathbf{i} \\
&\quad + [f^0(q)dq^2 + f^2(q)dq^0 + f^3(q)dq^1 - f^1(q)dq^3]\mathbf{j} \\
&\quad + [f^0(q)dq^3 + f^3(q)dq^0 + f^2(q)dq^1 - f^1(q)dq^2]\mathbf{k} \\
&= \boldsymbol{\alpha}^0 + \boldsymbol{\alpha}^1\mathbf{j} + \boldsymbol{\alpha}^2\mathbf{j} + \boldsymbol{\alpha}^3\mathbf{k} = \boldsymbol{\alpha}.
\end{aligned}$$



Então, pelo que mostramos,  $\omega = \text{Im}(f(q)dq) = \alpha^1 + \alpha^2 \mathbf{j} + \alpha^3 \mathbf{k}$ . Segue do exemplo 2 da pág. 18 temos que

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \alpha &= [\alpha^0 \wedge \alpha^0 - \alpha^1 \wedge \alpha^1 - \alpha^2 \wedge \alpha^2 - \alpha^3 \wedge \alpha^3] + \\ &\quad [\alpha^0 \wedge \alpha^1 + \alpha^1 \wedge \alpha^0 + \alpha^2 \wedge \alpha^3 - \alpha^3 \wedge \alpha^2] \mathbf{i} + \\ &\quad [\alpha^0 \wedge \alpha^2 + \alpha^2 \wedge \alpha^0 + \alpha^3 \wedge \alpha^1 - \alpha^1 \wedge \alpha^3] \mathbf{j} + \\ &\quad [\alpha^0 \wedge \alpha^3 + \alpha^3 \wedge \alpha^0 + \alpha^1 \wedge \alpha^2 - \alpha^2 \wedge \alpha^1] \mathbf{k} \\ &= 2\alpha^2 \wedge \alpha^3 \mathbf{i} + 2\alpha^1 \wedge \alpha^3 \mathbf{j} + 2\alpha^1 \wedge \alpha^2 \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Portanto,  $\text{Im} = \alpha \wedge \alpha$ . Por outro lado, pelo exemplo 1 da pág. 18

$$\frac{1}{2}[\omega, \omega] = 2 \left( \alpha^2 \wedge \alpha^3 \mathbf{i} + \alpha^1 \wedge \alpha^3 \mathbf{j} + \alpha^1 \wedge \alpha^2 \mathbf{k} \right).$$

Conclusão,

$$\frac{1}{2} = \text{Im}(f(q)dq)$$

como queríamos. Finalmente, a soma das últimas duas igualdades provadas nos dá o resultado esperado

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = \text{Im}(df \wedge dq + f(q)dq).$$

■

Em seguida aplicamos este resultado às 1-formas em  $\mathbb{H}$  com valores em  $\text{Im}\mathbb{H}$  que têm um papel central neste trabalho.

**Teorema 3.2.2.** *Sejam  $n \in \mathbb{H}$  e  $\lambda > 0$  fixos e considere a 1-forma  $\mathcal{A}_{\lambda,n}$  em  $\mathbb{H}$  com valores em  $\text{Im}\mathbb{H}$  dada por*

$$\mathcal{A}_{\lambda,n} = \text{Im} \left( \frac{\bar{q} - \bar{n}}{|q - n|^2 + \lambda^2} dq \right). \quad (3.2.9)$$

Então a intensidade de campo  $\mathcal{F}_\lambda$  do potencial de calibre  $\mathcal{A}_{\lambda,n}$  é

$$\mathcal{F}_{\lambda,n} = d\mathcal{A}_{\lambda,n} + \frac{1}{2}[\mathcal{A}_{\lambda,n}, \mathcal{A}_{\lambda,n}] = \frac{\lambda^2}{(|q - n|^2 + \lambda^2)^2} d\bar{q} \wedge dq$$

**Demonstração.** Pelo Teorema 3.2.1 temos que  $\mathcal{A}_{\lambda,n} = \text{Im} \left( \frac{\bar{q} - \bar{n}}{|q - n|^2 + \lambda^2} dq \right) = \text{Im}(f(q)dq)$ , onde  $f(q) = \frac{\bar{q} - \bar{n}}{|q - n|^2 + \lambda^2}$ . Disso, segue que

$$f(q)dq \wedge f(q)dq = \frac{1}{(|q - n|^2 + \lambda^2)^2} (\bar{q} - \bar{n})dq \wedge (\bar{q} - \bar{n})dq$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
df &= d((|q - n|^2 + \lambda^2)^{-1}(\bar{q} - \bar{n})) \\
&= d((|q - n|^2 + \lambda^2)^{-1}((q^0 - n^0) - (q^1 - n^1)\mathbf{i} - (q^2 - n^2)\mathbf{j} - (q^3 - n^3)\mathbf{k})) \\
&= d((|q - n|^2 + \lambda^2)^{-1}(q^0 - n^0)) - d((|q - n|^2 + \lambda^2)^{-1}(q^1 - n^1))\mathbf{i} \\
&\quad - d((|q - n|^2 + \lambda^2)^{-1}(q^2 - n^2))\mathbf{j} - d((|q - n|^2 + \lambda^2)^{-1}(q^3 - n^3))\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Mas

$$d((|q - n|^2 + \lambda^2)^{-1}(q^\alpha - n^\alpha)) = (|q - n|^2 + \lambda^2)^{-1}dq^\alpha + (q^\alpha - n^\alpha)d((|q - n|^2 + \lambda^2)^{-1})$$

então

$$df = \frac{1}{|q - n|^2 + \lambda^2}d\bar{q} + (\bar{q} - \bar{n})d\left(\frac{1}{|q - n|^2 + \lambda^2}\right)$$

Agora,

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{1}{|q - n|^2 + \lambda^2}\right) &= \partial_0\left(\frac{1}{|q - n|^2 + \lambda^2}\right)dq^0 + \partial_1\left(\frac{1}{|q - n|^2 + \lambda^2}\right)dq^1 \\
&\quad + \partial_2\left(\frac{1}{|q - n|^2 + \lambda^2}\right)dq^2 + \partial_3\left(\frac{1}{|q - n|^2 + \lambda^2}\right)dq^3 \\
&= -\frac{1}{(|q - n|^2 + \lambda^2)^2}\left(2(q^0 - n^0) + 2(q^0 - n^0) + 2(q^1 - n^1) \right. \\
&\quad \left. + 2(q^2 - n^2) + 2(q^3 - n^3)\right) \\
&= -\frac{1}{(|q - n|^2 + \lambda^2)^2}\left((\bar{q} - \bar{n})d\bar{q} + \overline{(q - n)d\bar{q}}\right) \\
&= -\frac{1}{(|q - n|^2 + \lambda^2)^2}\left((\bar{q} - \bar{n})d\bar{q} + dq(\bar{q} - \bar{n})\right)
\end{aligned}$$

Então

$$(\bar{q} - \bar{n})d\left(\frac{1}{|q - n|^2 + \lambda^2}\right) = -\frac{1}{(|q - n|^2 + \lambda^2)^2}\left(|\bar{q} - \bar{n}|^2d\bar{q} + (\bar{q} - \bar{n})dq(\bar{q} - \bar{n})\right)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
df &= \frac{1}{|q - n|^2 + \lambda^2}d\bar{q} - \frac{1}{(|q - n|^2 + \lambda^2)^2}\left(|\bar{q} - \bar{n}|^2d\bar{q} + (\bar{q} - \bar{n})dq(\bar{q} - \bar{n})\right) \\
&= \frac{\lambda^2}{(|q - n|^2 + \lambda^2)^2}\left(d\bar{q} + (\bar{q} - \bar{n})dq(\bar{q} - \bar{n})\right)
\end{aligned}$$

Em seguida, calculamos

$$\begin{aligned}
df \wedge dq &= \frac{\lambda^2}{(|q - n|^2 + \lambda^2)^2}\left(d\bar{q} \wedge dq + (\bar{q} - \bar{n})dq(\bar{q} - \bar{n}) \wedge dq\right) \\
&= \frac{\lambda^2}{(|q - n|^2 + \lambda^2)^2}\left(d\bar{q} \wedge dq + ((\bar{q} - \bar{n})dq) \wedge ((\bar{q} - \bar{n})dq)\right)
\end{aligned}$$

Segue que

$$df \wedge dq + f(q)dq \wedge f(q)dq = \frac{\lambda^2}{(|q-n|^2 + \lambda^2)^2} d\bar{q} \wedge dq$$

Como  $\frac{\lambda^2}{(|q-n|^2 + \lambda^2)^2}$  é real e  $d\bar{q} \wedge dq$  é imaginário puro (2.1.36), concluimos que

$$\mathcal{F}_{\lambda,n} = d\mathcal{A}_{\lambda,n} + \frac{1}{2}[\mathcal{A}_{\lambda,n}, \mathcal{A}_{\lambda,n}] = \frac{\lambda^2}{(|q-n|^2 + \lambda^2)^2} d\bar{q} \wedge dq.$$

■

Novamente observamos que obtemos (3.1.9) fazendo  $n = 0$  e  $\lambda = 1$  em (3.2.9). Mostraremos como surgem os potenciais  $\mathcal{A}_{\lambda,n}$  na seção 5.1. Estes potenciais são chamados **potenciais BPST genéricos**. O Teorema 3.2.2 nos dá explicitamente as intensidades de calibre  $\mathcal{F}_{\lambda,n}$  destes potenciais como queríamos.

**Observação 3.2.1.** *Assumindo que o domínio  $V$  de  $s$  é também uma vizinhança da carta  $(V, \varphi)$  com funções coordenadas  $x^1, \dots, x^n$ , podemos escrever  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\alpha dx^\alpha$  e  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$ , onde  $\mathcal{A}_\alpha$  e  $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$  são funções em  $V$  com valores em  $\mathfrak{g}$ . Então pelo que mostramos em (3.2.7)*

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \mathcal{A}_\beta - \partial_\beta \mathcal{A}_\alpha + [\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\beta]. \quad (3.2.10)$$

# 4 O Dual de Hodge e o Funcional de Yang-Mills

Neste capítulo introduzimos a definição do operador estrela de Hodge e definimos o que é uma 2-forma auto-dual e anti-auto-dual, resultando na equação diferencial parcial  $*\mathcal{F} = -\mathcal{F}$ . Mostramos que os BPST instantons são soluções destas equações quando  $n = 0$  e  $\lambda > 0$  explicitamente. E no final, definimos conexões anti-auto-duais que são os objetos de estudo do capítulo 5, na construção do espaço moduli  $\mathcal{M}$  das conexões ASD do fibrado de Hopf quatérnio. Seguimos principalmente [Nab10] neste capítulo.

## 4.1 O Dual de Hodge para 2-formas em Dimensão 4

Seja  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial real orientado de dimensão 4 que possui produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Sejam  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  uma base orientada, ortonormal de  $\mathcal{V}$  e  $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$  sua base dual de  $\mathcal{V}^*$ . Estende-se a orientação de  $\mathcal{V}$  para  $\mathcal{V}^*$  definindo  $\langle e^i, e^j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle$  e estendo por bilinearidade a  $\mathcal{V}^*$ . Denotamos por  $\Lambda^2(\mathcal{V})$  o espaço das formas bilineares antissimétricas. Uma base de  $\Lambda^2(\mathcal{V})$  é dada por

$$\{e^1 \wedge e^2, e^1 \wedge e^3, e^1 \wedge e^4, e^2 \wedge e^3, e^2 \wedge e^4, e^3 \wedge e^4\} \quad (4.1.1)$$

logo qualquer  $\Omega \in \Lambda^2(\mathcal{V})$  pode ser escrito como

$$\Omega = \sum_{i < j} \Omega_{ij} e^i \wedge e^j = \sum_{i,j=1}^4 \frac{1}{2} \Omega_{ij} e^i \wedge e^j \quad (4.1.2)$$

onde  $\Omega_{ij} = \Omega(e_i, e_j)$ . Estendemos o produto interno para  $\Lambda^2(\mathcal{V})$  definindo, para todo  $\varphi^1, \varphi^2, \xi^1, \xi^2 \in \mathcal{V}^*$ ,

$$\langle \varphi^1 \wedge \varphi^2, \xi^1 \wedge \xi^2 \rangle = \begin{vmatrix} \langle \varphi^1, \xi^1 \rangle & \langle \varphi^1, \xi^2 \rangle \\ \langle \varphi^2, \xi^1 \rangle & \langle \varphi^2, \xi^2 \rangle \end{vmatrix} \quad (4.1.3)$$

Definimos  $*$  :  $\Lambda^2(\mathcal{V}) \rightarrow \Lambda^2(\mathcal{V})$ , chamado **operador estrela de Hodge**, pondo  $*(e^i \wedge e^j) = e^k \wedge e^l$ , onde  $ijkl$  é uma permutação par de 1234 e estendo por linearidade. Mais detalhadamente,

$$\begin{aligned} *(e^1 \wedge e^2) &= e^3 \wedge e^4 & *(e^1 \wedge e^3) &= -e^2 \wedge e^4 \\ *(e^1 \wedge e^4) &= e^2 \wedge e^3 & *(e^2 \wedge e^3) &= e^1 \wedge e^4 \\ *(e^1 \wedge e^4) &= -e^1 \wedge e^3 & *(e^3 \wedge e^4) &= e^1 \wedge e^2 \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

de modo que, se  $\Omega = \sum_{i < j} \Omega_{ij} e^i \wedge e^j$ , então

$$\begin{aligned} *\Omega &= \Omega_{34} e^1 \wedge e^2 - \Omega_{24} e^1 \wedge e^3 + \Omega_{23} e^1 \wedge e^4 \\ &\quad + \Omega_{14} e^2 \wedge e^3 - \Omega_{13} e^2 \wedge e^4 + \Omega_{12} e^3 \wedge e^4 \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

$*\Omega$  é chamado **dual de Hodge** de  $\Omega \in \Lambda^2(\mathcal{V})$ . introduzimos o **símbolo de Levi-Civita**  $\epsilon_{abcd}$  definido, para  $a, b, c, d = 1, 2, 3, 4$ , por

$$\epsilon_{abcd} = \begin{cases} 1 & \text{se } abcd \text{ é uma permutação par de } 1234 \\ -1 & \text{se } abcd \text{ é uma permutação ímpar de } 1234 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.1.6)$$

e para quaisquer  $i, j = 1, 2, 3, 4$

$$*(e^i \wedge e^j) = \frac{1}{2} \epsilon_{ijkl} e^k \wedge e^l \quad (4.1.7)$$

Com isto é possível mostrar que dada uma outra base  $\{\hat{e}^1, \hat{e}^2, \hat{e}^3, \hat{e}^4\}$  orientada, ortonormal de  $\mathcal{V}$  tem-se que

$$\frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} \Omega(\hat{e}_i, \hat{e}_j) \epsilon_{ijkl} \hat{e}^k \wedge \hat{e}^l = \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} \Omega(e_i, e_j) \epsilon_{ijkl} e^k \wedge e^l \quad (4.1.8)$$

logo,  $*$  :  $\Lambda^2(\mathcal{V}) \rightarrow \Lambda^2(\mathcal{V})$  é uma transformação linear bem definida. Registramos algumas propriedades de  $*$  que são de interesse.

1.  $* \circ * = id_{\Lambda^2(\mathcal{V})}$
2.  $*$  :  $\Lambda^2(\mathcal{V}) \rightarrow \Lambda^2(\mathcal{V})$  é uma isometria com relação ao produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em  $\Lambda^2(\mathcal{V})$ , i.e.,  $\langle *\Omega, *\Psi \rangle = \langle \Omega, \Psi \rangle$ , para todo  $\Omega, \Psi \in \Lambda^2(\mathcal{V})$ . Isto é consequência de  $*$  levar base ortonormal em base ortonormal.

De #2 segue que  $*$  é uma transformação linear simétrica em relação a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , ou seja,

$$\langle *\Omega, \Psi \rangle = \langle \Omega, *\Psi \rangle \quad (4.1.9)$$

para todos  $\Omega, \Psi \in \Lambda^2(\mathcal{V})$ . Consequentemente, como  $*$ , possui autovalores  $\pm 1$  então  $\Lambda^2(\mathcal{V})$  possui uma decomposição ortogonal (segue do Teorema Espectral)

$$\Lambda^2(\mathcal{V}) = \Lambda_+^2(\mathcal{V}) \oplus \Lambda_-^2(\mathcal{V}) \quad (4.1.10)$$

onde  $\Lambda_+^2(\mathcal{V}) = \{\Psi \in \Lambda^2(\mathcal{V}); *\Psi = \Psi\}$  e  $\Lambda_-^2(\mathcal{V}) = \{\Psi \in \Lambda^2(\mathcal{V}); *\Psi = -\Psi\}$  são os autoespaços de  $\pm 1$ . Mais ainda, estes autoespaços são gerados pelas seguintes combinações

$$\begin{aligned} \Lambda_+^2(\mathcal{V}) &= \{e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4, e^1 \wedge e^3 + e^4 \wedge e^2, \\ &\quad e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3\} \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

$$\Lambda_-^2(\mathcal{V}) = \{e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4, e^1 \wedge e^3 - e^4 \wedge e^2, \\ e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^3\} \quad (4.1.12)$$

Para vermos isso, vemos que qualquer  $\Psi \in \Lambda^2(\mathcal{V})_+$  é da forma  $\Psi = \Omega + *\Omega$ , onde  $\Omega \in \Lambda^2(\mathcal{V})$ , pois  $*\Psi = *\Omega + \Omega = \Psi$ . Por (4.1.5) escrevemos

$$\begin{aligned} \Omega + *\Omega &= \Omega_{12}(e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4) + \Omega_{13}(e^1 \wedge e^3 + e^4 \wedge e^2) \\ &\quad + \Omega_{14}(e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3) + \Omega_{23}(e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3) \\ &\quad + \Omega_{24}(e^1 \wedge e^3 + e^4 \wedge e^2) + \Omega_{34}(e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4) \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \Psi &= (\Omega_{12} + \Omega_{34})(e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4) \\ &\quad + (\Omega_{13} - \Omega_{24})(e^1 \wedge e^3 + e^4 \wedge e^2) \\ &\quad + (\Omega_{14} + \Omega_{23})(e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3) \end{aligned}$$

Com isso mostramos (4.1.11). De maneira análoga mostra-se que vale (4.1.12). Portanto, todo  $\Omega \in \Lambda^2(\mathcal{V})$  possui uma decomposição única  $\Omega = \Omega_+ + \Omega_-$ , onde  $\Omega_{\pm} \in \Lambda_{\pm}^2(\mathcal{V})$ . Além disso, como a decomposição é ortogonal,

$$\|\Omega\|^2 = \langle \Omega, \Omega \rangle = \|\Omega_+\|^2 + \|\Omega_-\|^2 \quad (4.1.13)$$

Note que  $*\Omega = *(\Omega_+ + \Omega_-) = *\Omega_+ + *\Omega_- = \Omega_+ - \Omega_-$  (pois os autovalores são  $\pm 1$ ), o que nos permite escrever

$$\Omega_+ = \frac{1}{2}(\Omega + *\Omega) \quad \text{e} \quad \Omega_- = \frac{1}{2}(\Omega - *\Omega) \quad (4.1.14)$$

Em particular,  $*\Omega = \Omega$  se, e só se,  $\Omega_- = 0$ , neste caso  $\Omega$  é **auto-dual (SD)** e  $*\Omega = -\Omega$  se, e só se,  $\Omega_+ = 0$ , neste caso dizemos que  $\Omega$  é **anti-auto-dual (ASD)**.

**Observação 4.1.1.** *Em seguida, chamamos a atenção para algo importante que será usado na Proposição 5.2.3. O operador estrela  $*$  :  $\Lambda^2(\mathcal{V}) \rightarrow \Lambda^2(\mathcal{V})$  o qual depende da escolha da orientação e produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathcal{V}$  é **conformemente invariante**, no sentido de que se  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  for substituído por  $\langle \cdot, \cdot \rangle' = \lambda \langle \cdot, \cdot \rangle$ , com  $\lambda > 0$ , de modo que a orientação seja preservada, então, para todo  $\Omega \in \Lambda^2(\mathcal{V})$ , obtém-se o mesmo elemento  $*\Omega$  de  $\Lambda^2(\mathcal{V})$  calculando-se o dual de Hodge em relação a qualquer um dos dois produtos internos. De fato, se  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  é uma base orientada, ortonormal em relação a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathcal{V}$ , então  $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$ , onde  $\tilde{e}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}e_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  é uma base orientada, ortonormal em relação a  $\langle \cdot, \cdot \rangle'$  de  $\mathcal{V}$ . Além disso,  $\tilde{e}_i = \sqrt{\lambda}e^i$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  então*

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^4 \Omega(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \epsilon_{ijkl} \tilde{e}^k \wedge \tilde{e}^l \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^4 \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} e_i, \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e_j\right) \epsilon_{ijkl} \lambda e^k \wedge e^l \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^4 \frac{1}{\lambda} \Omega(e_i, e_j) \epsilon_{ijkl} \lambda e^k \wedge e^l \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^4 \Omega(e_i, e_j) \epsilon_{ijkl} e^k \wedge e^l
\end{aligned}$$

como queríamos.

Usaremos este resultado para mostrar que o operador estrela de Hodge comuta com o pullback, através de um isomorfismo conforme que preserva orientação.

**Teorema 4.1.1.** *Sejam  $\mathcal{V}_1$  e  $\mathcal{V}_2$  espaços vetoriais reais orientáveis de dimensão 4, com respectivos produtos internos  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ . Considere  $L : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$  um isomorfismo que preserve orientação e que seja conforme no sentido que*

$$L^* \langle \cdot, \cdot \rangle_2 = \lambda \langle \cdot, \cdot \rangle_1$$

para algum  $\lambda > 0$ , onde o pullback  $L^* \langle \cdot, \cdot \rangle_2$  é definido por

$$(L^* \langle \cdot, \cdot \rangle_2)(v, w) = \langle L(v), L(w) \rangle_2$$

para todos  $v, w \in \mathcal{V}_1$ . Para qualquer  $\Omega \in \Lambda^2(\mathcal{V}_2)$  defina o pullback  $L^* \Omega$  por

$$(L^* \Omega)(v, w) = \Omega(L(v), L(w)), \quad \forall v, w \in \mathcal{V}_1$$

Então

$$*(L^* \Omega) = L^* (*\Omega) \tag{4.1.15}$$

**Demonstração.** De acordo com a Observação 4.1.1 podemos calcular  $*(L^* \Omega)$  em relação a uma base  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  orientada e ortonormal em relação a  $L^* \langle \cdot, \cdot \rangle_2 = \lambda \langle \cdot, \cdot \rangle_1$ . Então  $\{L(e_1), L(e_2), L(e_3), L(e_4)\} = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$  é uma base orientada de  $\mathcal{V}_2$ , a qual é ortonormal em relação a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ , logo podemos usá-la para calcular  $*\Omega$ . Note que se  $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$  e  $\{\tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3, \tilde{e}^4\}$  são as bases duais correspondentes, então  $L^* \tilde{e}^k$  é dado por  $(L^* \tilde{e}^k)(v) = \tilde{e}^k(L(v))$ , em particular,

$$(L^* \tilde{e}^k)(e_l) = \tilde{e}^k(\tilde{e}_l) = \delta_l^k$$

Portanto,  $L^* \tilde{e}^k = e^k$ . Agora, calculamos

$$\begin{aligned}
*(L^*\Omega) &= \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^4 (L^*\Omega)(e_i, e_j) \epsilon_{ijkl} e^k \wedge e^l \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^4 \Omega(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \epsilon_{ijkl} e^k \wedge e^l
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
L^*(\Omega) &= L^* \left( \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^4 \Omega(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \epsilon_{ijkl} \tilde{e}^k \wedge \tilde{e}^l \right) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^4 \Omega(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \epsilon_{ijkl} (\tilde{e}^k \wedge \tilde{e}^l) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^4 \Omega(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \epsilon_{ijkl} (L^*e^k) \wedge (L^*e^l) = *(L^*\Omega)
\end{aligned}$$

como queríamos. ■

Em seguida observamos que se  $\Omega = \Omega_+ + \Omega_-$ , então  $L^*\Omega = L^*\Omega_+ + L^*\Omega_-$ , logo

$$*(L^*\Omega) = *(L^*\Omega_+) + *(L^*\Omega_-) = L^*\Omega_+ - L^*\Omega_-$$

Agora, se  $\Omega$  é SD, então  $\Omega = \Omega_+$  e  $\Omega_- = 0$ , e consenquentemente  $*(L^*\Omega) = L^*\Omega_+ = L^*\Omega$  e  $L^*\Omega$  também é SD. Analogamente, se  $\Omega$  é ASD, então  $L^*\Omega$  também é ASD. Em particular,  $L^*\Omega_+$  é SD e  $L^*\Omega_-$  é ASD logo

$$(L^*\Omega)_+ = L^*\Omega_+ \quad \text{e} \quad (L^*\Omega)_- = L^*\Omega_- \quad (4.1.16)$$

para qualquer isomorfismo conforme  $L : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$  que preserve orientação e qualquer  $\Omega = \Omega_+ + \Omega_-$  em  $\Lambda^2(\mathcal{V})$ .

Agora, estendemos esta ideia para 2-formas em variedades Riemannianas de dimensão 4. Seja  $X$  uma variedade deste tipo, cada  $T_p(X)$  possui uma orientação determinada pela orientação de  $X$ . Além disso, a métrica Riemanniana  $\mathbf{g}$  em  $X$  associa um produto interno  $\mathbf{g}_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$  para cada  $T_p(X)$ . Portanto, podemos definir o operador estrela de Hodge em cada  $\Lambda^2(T_p(X))$ , e que será denotado por

$$* : \Lambda^2(T_p(X)) \rightarrow \Lambda^2(T_p(X)) \quad (4.1.17)$$

Como uma 2-forma  $\Omega$  em  $X$  associa uma forma bilinear  $\Omega_p \in \Lambda^2(T_p(X))$  antissimétrica para cada  $p \in X$ , tem-se que  $*\Omega_p \in \Lambda^2(T_p(X))$  para cada  $p \in X$ . Mostraremos que  $p \mapsto *\Omega_p$  é uma 2-forma, denotada por  $*\Omega$ , provando que é suave. Fazemos isso localmente então considerando  $(U, \varphi)$  com  $U$  conexo. Aqui faremos uso de um resultado que nada mais é do que a versão suave do processo de ortonormalização de Gram-Schmidt para variedades Riemannianas.



**Proposição 4.1.1.** *Seja  $X$  uma variedade diferenciável de dimensão- $n$  com uma métrica Riemanniana  $\mathbf{g}$  e uma orientação  $\mu$ . Seja  $U$  um subconjunto aberto conexo de  $X$  no qual estão definidos campos vetoriais diferenciáveis  $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$  tais que  $\{\mathbf{V}_1(p), \dots, \mathbf{V}_n(p)\} \in \mu_p$  para cada  $p \in U$ . Então, existem campos vetoriais diferenciáveis  $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n$  em  $U$  tais que, para cada  $p \in U$ ,  $\{\mathbf{E}_1(p), \dots, \mathbf{E}_n(p)\} \in \mu_p$  e  $\mathbf{g}_p(\mathbf{E}_i(p), \mathbf{E}_j(p)) = \delta_{ij}$ .*

Se as funções coordenadas de  $(U, \varphi)$  são  $x^1, x^2, x^3, x^4$ , então os campos vetoriais  $\mathbf{V}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , satisfazem as hipóteses da Proposição 4.1.1. Portanto, existem campos vetoriais suaves  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$  e  $\mathbf{E}_4$  em  $U$  tais que, para cada  $p \in U$ ,  $\{\mathbf{E}_1(p), \mathbf{E}_2(p), \mathbf{E}_3(p), \mathbf{E}_4(p)\} \in \mu_p$  e  $\langle \mathbf{E}_i(p), \mathbf{E}_j(p) \rangle_p = \delta_{ij}$ . Como qualquer base orientada, ortonormal de  $T_p(X)$  pode ser usada para calcular  $*\Omega_p$ , temos que

$$\begin{aligned} *\Omega_p &= \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^4 \Omega_p(\mathbf{E}_i(p), \mathbf{E}_j(p)) \epsilon_{ijkl} \mathbf{E}^k(p) \wedge \mathbf{E}^l(p) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^4 \left( \Omega_p(\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j) \epsilon_{ijkl} \mathbf{E}^k \wedge \mathbf{E}^l \right)(p) \end{aligned}$$

então como  $\Omega(\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j)$  é uma composição de funções suaves e  $\mathbf{E}_i \wedge \mathbf{E}_j$  é suave, segue que  $p \mapsto \Omega_p$  é suave.

Logo, para qualquer 2-forma  $\Omega$  na variedade Riemanniana orientada  $X$  de dimensão 4 temos uma outra 2-forma  $*\Omega$  chamada **dual de Hodge** de  $\Omega$ .  $\Omega$  é chamado **auto-dual** (SD) se  $*\Omega = \Omega$  e **anti-auto-dual** (ASD) se  $*\Omega = -\Omega$ . Definimos  $\Omega_+ = \frac{1}{2}(\Omega + *\Omega)$  e  $\Omega_- = \frac{1}{2}(\Omega - *\Omega)$  e temos que

$$\Omega = \Omega_+ + \Omega_- \quad (4.1.18)$$

onde  $\Omega_+$  é SD e  $\Omega_-$  é ASD. Logo  $\Omega$  é SD se, e somente se,  $\Omega = \Omega_+$  e  $\Omega$  é ASD se, e somente se,  $\Omega = \Omega_-$  e, como módulos- $C^\infty(X)$

$$\Lambda^2(X) = \Lambda_+^2(X) \oplus \Lambda_-^2(X)$$

Definindo o dual de Hodge para uma 2-formas em  $X$  com valores em um espaço vetorial componente a componente, estende todas estas noções imediatamente. Suponha que  $(U, \varphi)$  seja uma carta de  $X$ , consistente com a orientação de  $X$  e tal que, em cada ponto de  $U$ , os campos vetoriais coordenadas  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_{i=1,2,3,4}$  sejam ortonormais relativamente à métrica Riemanniana em  $X$ . Isto ocorre, por exemplo, para a orientação, métrica e coordenadas usuais em  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ . Então, por (4.1.11) e (4.1.12)

$$\begin{aligned} dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4 \\ dx^1 \wedge dx^3 + dx^4 \wedge dx^2 \\ dx^1 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

geram as 2-formas SD em  $U$  e

$$\begin{aligned} dx^1 \wedge dx^2 - dx^3 \wedge dx^4 \\ dx^1 \wedge dx^3 - dx^4 \wedge dx^2 \\ dx^1 \wedge dx^4 - dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

geram as 2-formas ASD em  $U$ . Portanto, segue do Teorema 3.2.2 e de (2.1.37) que todas as 2-formas em  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$  com valores em  $\text{Im}\mathbb{H}$  dadas por

$$\mathcal{F}_{\lambda,n} = \frac{\lambda^2}{(|q-n|^2 + \lambda^2)^2} d\bar{q} \wedge dq$$

para algum  $\lambda > 0$  e  $n \in \mathbb{H}$  são ASD. Estas são as intensidades de campo de calibre dos potenciais de calibre BPST genéricos

$$\mathcal{A}_{\lambda,n} = \text{Im} \left( \frac{\bar{q} - \bar{n}}{|q-n|^2 + \lambda^2} dq \right)$$

em  $\mathbb{R}^4$ .

A equação anti-auto-dual  $*\mathcal{F} = -\mathcal{F}$  para um campo de calibre em  $\mathbb{R}^4$  é um sistema de equações diferenciais dos componentes do potencial correspondente  $\mathcal{A}$  e os potenciais BPST foram originalmente achados como soluções deste sistema. Em seguida, mostraremos como isto é feito para  $n = 0$ .

Procuramos uma 1-forma  $\mathcal{A}$  em  $\mathbb{H}$  com valores em  $\text{Im}\mathbb{H}$  cuja intensidade de campo  $\mathcal{F}$  seja ASD e de modo que seja assintoticamente de calibre puro no sentido de que

$$\mathcal{A}(q) = A(|q|)g^*\Theta$$

onde  $A(|q|)$  tende a 1 de forma decrescente na medida que  $|q| \rightarrow \infty$ ,  $g : \mathbb{H} - \{0\} \rightarrow Sp(1)$  é dado por  $g(q) = q/|q|$  e  $\Theta$  é a 1-forma de Cartan para  $Sp(1)$ . Aplicando a Proposição 3.1.2 podemos escrever

$$\mathcal{A}(q) = A(|q|)\text{Im}(q^{-1}dq) = \text{Im}((A(|q|)q^{-1})dq) = \text{Im}(f(q)dq)$$

onde  $f(q) = A(|q|)q^{-1} = |q|^2 A(|q|)\bar{q}$ . Por (3.2.8) temos que

$$\mathcal{F}(q) = \text{Im}(df(q) \wedge dq + f(q)dq \wedge f(q)dq)$$

onde

$$\begin{aligned} f(q)dq \wedge f(q)dq &= A(|q|)q^{-1}dq \wedge A(|q|)q^{-1}dq \\ &= (A(|q|))^2 q^{-1}dq \wedge q^{-1}dq \end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned}
df(q) &= d(|q|^{-2}A(|q|)\bar{q}) = d(|q|^{-2}A(|q|)(q^0 - q^1\mathbf{i} - q^2\mathbf{j} - q^3\mathbf{k})) \\
&= d(|q|^{-2}A(|q|)q^0) - d(|q|^{-2}A(|q|)q^1)\mathbf{i} \\
&\quad - d(|q|^{-2}A(|q|)q^2)\mathbf{j} - d(|q|^{-2}A(|q|)q^3)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

mas  $d(|q|^{-2}A(|q|)q^\alpha) = |q|^{-2}A(|q|)dq^\alpha + q^\alpha d(|q|^{-2}A(|q|))$  então

$$df(q) = |q|^{-2}A(|q|)d\bar{q} + \bar{q}d(|q|^{-2}A(|q|)).$$

Agora,

$$\begin{aligned}
d(|q|^{-2}A(|q|)) &= \partial_0(|q|^{-2}A(|q|))dq^0 + \partial_1(|q|^{-2}A(|q|))dq^1 \\
&\quad + \partial_2(|q|^{-2}A(|q|))dq^2 + \partial_3(|q|^{-2}A(|q|))dq^3
\end{aligned}$$

com

$$\partial_\alpha(|q|^{-2}A(|q|))dq^\alpha = (|q|^{-3}A'(|q|)q^\alpha - 2|q|^{-4}q^\alpha A(|q|))dq^\alpha$$

Logo

$$\begin{aligned}
d(|q|^{-2}A(|q|)) &= |q|^{-3}\frac{A'(|q|)}{2}(2q^0dq^0 + 2q^1dq^1 + 2q^2dq^2 + q^3dq^3) \\
&\quad - |q|^{-4}A(|q|)(2q^0dq^0 + 2q^1dq^1 + 2q^2dq^2 + q^3dq^3) \\
&= \frac{A'(|q|)}{2|q|^3}(qd\bar{q} + \bar{q}d\bar{q}) - \frac{A(|q|)}{|q|^4}(qd\bar{q} + \bar{q}d\bar{q}) \\
&= \frac{A'(|q|)}{2|q|^3}(qd\bar{q} + dq\bar{q}) - \frac{A(|q|)}{|q|^4}(qd\bar{q} + dq\bar{q}) \\
&= \left(\frac{A'(|q|)}{2|q|^3} - \frac{A(|q|)}{|q|^4}\right)(qd\bar{q} + dq\bar{q})
\end{aligned}$$

Então,

$$\bar{q}d(|q|^{-2}A(|q|)) = \left(\frac{A'(|q|)}{2|q|^3} - \frac{A(|q|)}{|q|^4}\right)(|q|^2d\bar{q} + \bar{q}dq\bar{q})$$

Portanto,

$$df = \left(\frac{A(|q|)}{|q|^2}\right)d\bar{q} + \left(\frac{A'(|q|)}{2|q|^3} - \frac{A(|q|)}{|q|^4}\right)(|q|^2d\bar{q} + \bar{q}dq\bar{q})$$

E segue que,

$$\begin{aligned}
df \wedge dq &= \left(\frac{A(|q|)}{|q|^2}\right)d\bar{q} \wedge dq + \left(\frac{A'(|q|)}{2|q|} - \frac{A(|q|)}{|q|^2}\right)d\bar{q} \wedge dq \\
&\quad + \left(|q|\frac{A'(|q|)}{2} - A(|q|)\right)\left(\frac{\bar{q}}{|q|^2}dq\frac{\bar{q}}{|q|^2} \wedge dq\right) \\
&= \frac{A'(|q|)}{2|q|}d\bar{q} \wedge dq + \left(\frac{|q|}{2}A'(|q|) - A(|q|)\right)(q^{-1}dq \wedge q^{-1}dq)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
df \wedge dq + f(q)dq \wedge f(q)dq \\
&= \frac{A'(|q|)}{2|q|} d\bar{q} \wedge dq + \left( \frac{|q|}{2} A'(|q|) - A(|q|) \right) (q^{-1}dq \wedge q^{-1}dq) \\
&\quad + (A(|q|))^2 (q^{-1}dq \wedge q^{-1}dq) \\
&= \frac{A'(|q|)}{2|q|} d\bar{q} \wedge dq + \left( \frac{|q|}{2} A'(|q|) + A(|q|)(A(|q|) - 1) \right) (q^{-1}dq \wedge q^{-1}dq)
\end{aligned}$$

Temos que  $d\bar{q} \wedge dq$  é imaginário puro (por (2.1.37)) e obtemos da Proposição 3.1.2 e de (3.2.5) que  $d(g^*\Theta) = \text{Im}(q^{-1}dq) = d(\text{Im}(q^{-1}dq)) = \text{Im}(dq^{-1} \wedge dq) = \text{Im}\left(d\left(\frac{\bar{q}}{|q|^2}\right) \wedge dq\right)$  mas pelo processo feito anteriormente temos

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{\bar{q}}{|q|^2}\right) &= \frac{1}{|q|^2} d\bar{q} + \bar{q} d\left(\frac{1}{|q|^2}\right) \\
&= \frac{1}{|q|^2} d\bar{q} - \frac{1}{|q|^2} d\bar{q} - \frac{1}{|q|^4} (\bar{q}dq\bar{q}) = -\frac{1}{|q|^4} (\bar{q}dq\bar{q})
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
d(g^*\Theta) &= \text{Im}\left(-\frac{1}{|q|^4} (\bar{q}dq\bar{q}) \wedge dq\right) = \text{Im}\left(-\frac{1}{|q|^4} \bar{q}dq \wedge \bar{q}dq\right) \\
&= \text{Im}(-(q^{-1}dq \wedge q^{-1}dq)) = -\text{Im}(q^{-1}dq \wedge q^{-1}dq)
\end{aligned}$$

Com isso, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \frac{1}{2|q|} A'(|q|) d\bar{q} \wedge dq \\
&\quad - \left( \frac{|q|}{2} A'(|q|) + A(|q|)(A(|q|) - 1) \right) d(g^*\Theta)
\end{aligned} \tag{4.1.21}$$

A partir de (4.1.21) vemos que  $\mathcal{F}$  é ASD se

$$A'(|q|) = -\frac{2}{|q|} A(|q|)(A(|q|) - 1) \tag{4.1.22}$$

e consequentemente,  $\mathcal{F}$  fica

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{|q|^2} A(|q|)(A(|q|) - 1) d\bar{q} \wedge dq \tag{4.1.23}$$

logo precisamos resolver esta equação diferencial para obtermos  $A(|q|)$ . Para isso, chame  $\rho = |q|$ , e como a equação é separável escrevemos,

$$\begin{aligned}
\frac{A'(\rho)}{A(\rho)(A(\rho) - 1)} = -\frac{2}{\rho} &\implies \int \frac{A'(\rho)}{A(\rho)(A(\rho) - 1)} d\rho = -2 \int \frac{1}{\rho} d\rho \\
&\implies \int \frac{A'(\rho)}{A(\rho) - 1} - \frac{A'(\rho)}{A(\rho)} d\rho = 2 \int \frac{1}{\rho} d\rho \\
&\implies \ln(A(\rho) - 1) - \ln(A(\rho)) = 2 \ln \rho + c_1 \\
&\implies \ln \left( \frac{A(\rho) - 1}{A(\rho)} \right) = \ln \frac{1}{\rho^2} + c_1 \\
&\implies \frac{A(\rho) - 1}{A(\rho)} = c_1 \frac{1}{\rho^2} \implies A(\rho) = \frac{\rho^2}{\rho^2 + c_1}
\end{aligned}$$

Tomando  $c_1 = \lambda^2$  temos que

$$A(|q|) = \frac{|q|^2}{|q|^2 + \lambda^2} \quad (4.1.24)$$

são soluções da equação diferencial (4.1.22) e portanto temos  $\mathcal{A}(q) = \frac{|q|^2}{|q|^2 + \lambda^2} \text{Im}(q^{-1} dq)$ . Agora usamos (4.1.23) para obtermos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= -\frac{1}{|q|^2} \left( \frac{|q|^2}{|q|^2 + \lambda^2} \right) \left( \frac{|q|^2}{|q|^2 + \lambda^2} - 1 \right) d\bar{q} \wedge dq \\
&= \frac{\lambda^2}{(|q|^2 + \lambda^2)^2} d\bar{q} \wedge dq
\end{aligned} \quad (4.1.25)$$

como queríamos.

Suponha  $(X_1, \mathbf{g}_1)$  e  $(X_2, \mathbf{g}_2)$  duas variedades Riemannianas de dimensão 4 com orientações  $\mu_1$  e  $\mu_2$ . Suponha que  $f : X_1 \rightarrow X_2$  é um difeomorfismo conforme que preserva orientação. Então, em cada  $p \in X_1$ ,  $f_{*p} : T_p(X_1) \rightarrow T_{f(p)}X_2$  é um isomorfismo conforme que preserva orientação. Como o pullback e o dual de Hodge ambos são definidos ponto a ponto, segue de (4.1.15) que

$$*(f^*\Omega) = f^*(*\Omega) \quad (4.1.26)$$

para todo  $\Omega \in \Lambda^2(X_2)$ . Em particular, o pullback por um difeomorfismo conforme que preserva orientação de uma 2-forma é ASD. Considere, por exemplo,  $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$  e  $S^4$  ambos com suas métricas Riemannianas e orientações. Sejam  $U_S = S^4 - \{N\}$  e  $\varphi_S : U_S \rightarrow \mathbb{H}$  a projeção estereográfica a partir do pólo norte  $N$ . Então  $\varphi_S$  e  $\varphi_S^{-1} : \mathbb{H} \rightarrow U_S$  ambos são difeomorfismos conformes que preservam orientação (ver discussão de (2.1.32)). Consequentemente, uma 2-forma em  $S^4$  é ASD se, e somente se, seu pullback para  $\mathbb{H}$  por  $\varphi_S^{-1}$  é ASD e sabemos que as 2-formas ASD em  $\mathbb{H}$  são geradas por (4.1.20). Agora, por continuidade, uma 2-forma em  $\Omega$  é ASD se, e somente se, sua restrição à  $U_S$  é ASD em  $U_S$ . A conclusão é que anti-auto-dualidade em  $S^4$  é algo direto de ser verificado: Faça a restrição a  $S^4 - \{N\}$ , tome o pullback para  $\mathbb{H}$  por  $\varphi_S^{-1}$  e veja se é gerado por (4.1.20).

Fazemos esta mesma análise para uma conexão no fibrado de Hopf  $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$ . Agora, a curvatura  $\Omega$  de  $\omega$  é uma 2-forma em  $S^7$  então a noção de anti-auto-dualidade

ainda não está definida para  $\Omega$ . Entretanto,  $U_S \subseteq S^4$  também é o domínio de uma seção transversal canônica  $s_S : U_S \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(U_S)$  do fibrado de Hopf (corresponde a  $V_2 \subseteq \mathbb{H}\mathbb{P}^1$  pelo difeomorfismo em (2.1.18)). A intensidade de calibre correspondente  $\mathcal{F}_S = s_S^* \Omega$  é uma 2-forma em  $U_S$  e dizemos que  $\Omega$  (e a conexão  $\omega$ ) é **anti-auto-dual (ASD)** se, e somente se,  $\mathcal{F}_S$  é ASD. Como vimos acima, este será o caso se, e somente se, a expressão coordenada  $(s_S \circ \varphi_S^{-1})^* \Omega = (\varphi_S^{-1})^* \mathcal{F}_S$  é ASD.

Para concluirmos esta seção, mostraremos que a conexão natural  $\omega$  no fibrado de Hopf assim como as conexões  $g \cdot \omega = \rho_{g^{-1}}^* \omega$  para  $g \in SL(2, \mathbb{H})$  são ASD (ver definição (5.1.1)). Ora, temos que

$$\begin{aligned} *(s_S \circ \varphi_S^{-1})^* \Omega &= (s_S \circ \varphi_S^{-1})^* (*\Omega) \\ &= (\varphi_S^{-1})^* (s_S^* (*\Omega)) \\ &= (\varphi_S^{-1})^* (* (s_S^* \Omega)) \\ &= (\varphi_S^{-1})^* (* \mathcal{F}_S) \end{aligned} \tag{4.1.27}$$

pois o dual de Hodge comuta com o pullback e como  $\mathcal{F}_{\lambda,n}$  são ASD a forma a conexão natural

$$\omega = \text{Im}(q^1 dq^1 + q^2 dq^2)$$

é ASD no fibrado de Hopf. Além disso,

$$\begin{cases} d(\rho_{g^{-1}}^* \omega) = \rho_{g^{-1}}^* (d\omega) \\ [\rho_{g^{-1}}^* \omega, \rho_{g^{-1}}^* \omega] = \rho_{g^{-1}}^* [\omega, \omega] \end{cases}$$

Logo

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}} &= d(\rho_{g^{-1}}^* \omega) + \frac{1}{2} [\rho_{g^{-1}}^* \omega, \rho_{g^{-1}}^* \omega] \\ &= \rho_{g^{-1}}^* \left( d\omega + \frac{1}{2} [\omega, \omega] \right) = \rho_{g^{-1}}^* (\mathcal{F}_S) \end{aligned}$$

Consequentemente como  $\mathcal{F}_S$  é ASD, por (4.1.27)  $\rho_{g^{-1}}^* \omega$  são ASD. Voltaremos a falar destas conexões no Capítulo 5 ao introduzirmos a definição de espaço moduli.

## 4.2 O Funcional de Yang-Mills

Lembremos de um resultado que depende de (2.4.3).

**Teorema 4.2.1.** *Sejam  $G$  um grupo de Lie de matrizes com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  e  $\mathcal{B}(P, \mathcal{P}, \sigma)$  um  $G$ -fibrado principal sobre  $X$ . Seja  $\{(V_i, V_j)\}_{j \in J}$  uma família de trivializações para  $\mathcal{B}$*

com  $\bigcap_{j \in J} V_j = X$ . Suponha que, para cada  $j \in J$ ,  $\mathcal{A}_j$  seja uma 1-forma em  $V_j$  com valores em  $\mathfrak{g}$  e que, sempre que  $V_j \cap V_i \neq \emptyset$ ,

$$\mathcal{A}_j = \text{ad}_{g_{ij}^{-1}} \circ \mathcal{A}_i + \Theta_{ij} \quad (4.2.1)$$

onde  $g_{ij} : V_j \cap V_i \rightarrow G$  é a função de transição e  $\Theta_{ij} = g_{ij}^* \Theta$  é o pullback da 1-forma de Cartan  $\Theta$  de  $G$  por  $g_{ij}$ . Então existe uma única forma de conexão  $\omega$  em  $P$  tal que, para cada  $j \in J$ ,  $\mathcal{A}_j = s_j^* \omega$ , onde  $s_j : V_j \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V_j)$  é a seção transversal canônica associada com a trivialização  $(V_j, \psi_j)$ .

Esqueçamos o fibrado de Hopf por um momento e consideremos a 1-forma  $\mathcal{A}$  em  $\mathbb{H}$  com valores em  $\text{Im}\mathbb{H}$  (i.e., com valores em  $\mathfrak{su}(2)$ ) dada por

$$\mathcal{A} = \text{Im} \left( \frac{\bar{q}}{1 + |q|^2} dq \right) \quad (4.2.2)$$

Pelo Teorema 4.2.1 podemos identificar  $\mathcal{A}$  com o potencial de calibre de uma 1-forma de conexão no  $Sp(1)$ -fibrado trivial sobre  $\mathbb{H}$ . Vimos que, em  $\mathbb{H} - \{0\}$ ,  $\mathcal{A}$  pode ser escrito como

$$\mathcal{A} = \frac{|q|^2}{1 + |q|^2} \text{Im}(q^{-1} dq) = \frac{|q|^2}{1 + |q|^2} g^* \Theta$$

onde  $g : \mathbb{H} - \{0\} \rightarrow S^3 \cong Sp(1) \cong SU(2)$  é dado por  $g(q) = q/|q|$  e  $\Theta$  é a 1-forma de Cartan no  $Sp(1)$ -fibrado sobre  $\mathbb{H}$ . Disso, fica claro que  $\mathcal{A}$  é “assintoticamente de calibre puro”, ou seja,  $\mathcal{A} \rightarrow g^* \Theta$  quando  $|q| \rightarrow \infty$ . Aqui  $g^* \Theta$  é visto como o potencial de calibre de uma conexão flat (curvatura zero) no  $Sp(1)$ -fibrado trivial sobre  $\mathbb{H} - \{0\}$ . A intensidade de campo de  $\mathcal{A}$  é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{1}{(1 + |q|^2)^2} d\bar{q} \wedge dq \\ &= \frac{2}{(1 + |q|^2)^2} \left( (dq^0 \wedge dq^1 - dq^2 \wedge dq^3) \mathbf{i} \right. \\ &\quad \left. + (dq^0 \wedge dq^2 - dq^1 \wedge dq^3) \mathbf{j} \right. \\ &\quad \left. + (dq^0 \wedge dq^3 - dq^1 \wedge dq^2) \mathbf{k} \right) \\ &= \frac{2\mathbf{i}}{(1 + |q|^2)^2} dq^0 \wedge dq^1 + \frac{-2\mathbf{i}}{(1 + |q|^2)^2} dq^2 \wedge dq^3 + \dots \end{aligned}$$

Existe uma construção usual, que utiliza o produto interno determinado pela forma de Killing, para designar uma medida numérica da intensidade total de campo em cada ponto  $q$ . Mais especificamente, definimos para cada  $q \in \mathbb{H}$  a norma ao quadrado  $\|\mathcal{F}(q)\|^2$  de  $\mathcal{F}(q)$  como sendo soma dos quadrados das normas dos componentes de  $\mathcal{F}(q)$  em relação

a  $dq^\alpha \wedge dq^\beta$ . Temos, portanto, pelo Teorema 3.2.2 (para  $\lambda = 1$  e  $n = 0$ ) e das componentes de  $\mathcal{F}(q)$  acima que

$$\|\mathcal{F}(q)\|^2 = 6 \left( 2 \left( \frac{4}{(1 + |q|^2)^4} \right) \right) = \frac{48}{(1 + |q|^2)^4} \quad (4.2.3)$$

Uma medida global da intensidade total de campo é obtida integrando  $\|\mathcal{F}(q)\|^2$  sobre  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ . Então, definimos

$$\|\mathcal{F}\|^2 = \int_{\mathbb{R}^4} \|\mathcal{F}(q)\|^2 d(\mathbf{vol}_{\mathbb{R}^4}) = 48 \int_{\mathbb{R}^4} \frac{1}{(1 + |q|^2)^4} d(\mathbf{vol}_{\mathbb{R}^4}) \quad (4.2.4)$$

Façamos o cálculo desta integral. Usaremos as coordenadas esféricas usuais em  $\mathbb{R}^4$  definidas por

$$\begin{aligned} q^0 &= \rho \sin \chi \sin \phi \cos \theta \\ q^1 &= \rho \sin \chi \sin \phi \sin \theta \\ q^2 &= \rho \sin \chi \cos \phi \\ q^3 &= \rho \cos \chi \end{aligned}$$

onde  $\rho = |q| \geq 0$ ,  $0 \leq \chi \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Portanto

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}\|^2 &= 48 \int_{\mathbb{R}^4} \frac{1}{(1 + |q|^2)^4} d(\mathbf{vol}_{\mathbb{R}^4}) \\ &= 48 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{1}{(1 + \rho^2)^4} \rho^3 \sin^2 \chi \, d\rho \, d\chi \, d\phi \, d\theta \\ &= 48 \left( \int_0^\infty \frac{\rho^3}{(1 + \rho^2)^4} d\rho \right) \left( \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \sin^2 \chi \, d\chi \, d\phi \, d\theta \right) \\ &= 48 \left( \frac{1}{12} \right) 2\pi^2 \\ &= 8\pi^2 \end{aligned}$$

A seguir apresentamos uma generalização deste resultado.

**Proposição 4.2.1.** *Sejam  $n \in \mathbb{H}$ ,  $\lambda > 0$  e  $\mathcal{A}_{\lambda,n} = \text{Im} \left( \frac{\bar{q} - \bar{n}}{|q - n|^2 + \lambda^2} dq \right)$ . Consequentemente,*

$$\mathcal{F}_{\lambda,n} = \frac{\lambda^4}{(|q - n|^2 + \lambda^2)^2}$$

Então,

$$\|\mathcal{F}_{\lambda,n}(q)\|^2 = \frac{48\lambda^4}{(|q - n|^2 + \lambda^2)^4} \quad e \quad \|\mathcal{F}_{\lambda,n}\|^2 = 8\pi^2.$$

Segue da Proposição 4.2.1 que todos os potenciais de calibre descritos (incluindo o caso  $n = 0$ ,  $\lambda = 1$  considerado anteriormente) possuem a mesma intensidade total de campo



$8\pi^2$ . Observe que, para um  $n$  fixado,  $\|\mathcal{F}_{\lambda,n}(q)\|^2 = \frac{48\lambda^4}{(|q-n|^2+\lambda^2)^4}$  possui um valor máximo  $48/\lambda^4$  em  $q = n$ . Na medida que  $\lambda \rightarrow 0$  esse valor máximo tende a infinito de maneira que as integrais sobre  $\mathbb{R}^4$  de  $\|\mathcal{F}_{\lambda,n}(q)\|^2$  para vários valores de  $\lambda$  permanecem constantes (ver Figura 4.1). Logo, na medida que  $\lambda \rightarrow 0$  a intensidade de campo concentra-se mais e mais em  $q = n$ . Referimos-nos a  $n$  como o **centro** e  $\lambda$  como a **escala** do potencial  $\mathcal{A}_{\lambda,n}$ .

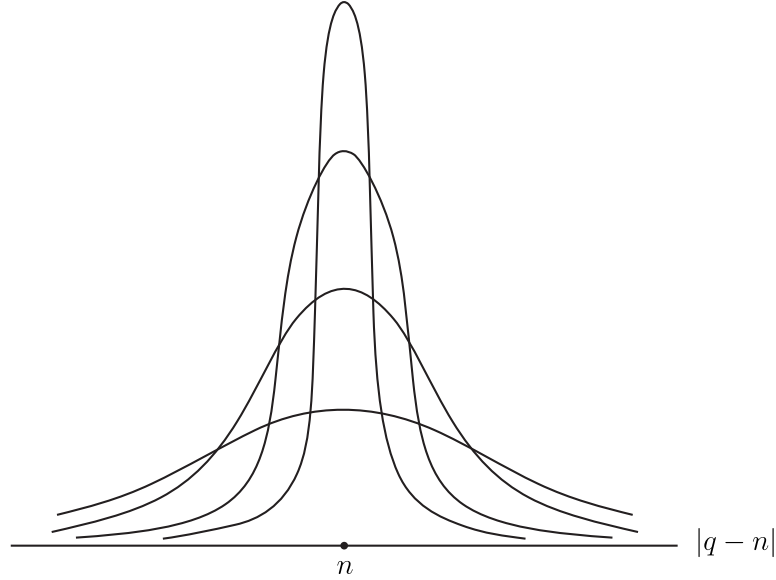


Figura 4.1 – Fonte: Naber, 2010, pag. 357

Considere mais geralmente um potencial de calibre  $\mathcal{A}$  arbitrário no  $Sp(1)$ -fibrado trivial sobre  $\mathbb{R}^4$  e seja  $\mathcal{F}$  sua intensidade de campo. Em cada  $q \in \mathbb{R}^4$  definimos  $\|\mathcal{F}(q)\|^2$  como sendo a soma dos quadrados das normas (relativa à forma de Killing em  $\mathfrak{sp}(1)$ ) dos componentes de  $\mathcal{F}(q)$  em relação aos  $dq^\alpha \wedge dq^\beta$ .

Segue da definição da forma de Killing em  $\mathfrak{sp}(1)$  e da lei de transformação (2.4.18) para intensidade de campo que  $\|\mathcal{F}(q)\|^2$  é **invariante por calibre**, i.e., se  $g$  é uma transformação de calibre sobre algum aberto de  $\mathbb{R}^4$  e  $\mathcal{F}^g = g^{-1}\mathcal{F}g$  é a intensidade de campo correspondente, então  $\|\mathcal{F}^g(q)\|^2 = \|\mathcal{F}(q)\|^2$  para cada  $q$ . Definimos a intensidade total de campo de  $\mathcal{A}$  por

$$\|\mathcal{F}\|^2 = \int_{\mathbb{R}^4} \|\mathcal{F}(q)\|^2 d(\text{vol}_{\mathbb{R}^4})$$

$\|\mathcal{F}\|^2$  é chamada **ação de Yang-Mills** de  $\mathcal{A}$  e é denotada por  $\mathcal{YM}(\mathcal{A})$ . O funcional  $\mathcal{YM}$  que associa uma ação de Yang-Mills  $\mathcal{YM}(\mathcal{A})$  para cada potencial  $\mathcal{A}$  é chamado **funcional de Yang-Mills** em  $\mathbb{R}^4$ .

Certas restrições físicas são colocadas sobre as classes de potenciais  $\mathcal{A}$  que são de interesse. Como  $\mathcal{YM}(\mathcal{A})$  representa uma intensidade total de campo, considera-se apenas potenciais de **ação finita**, ou seja, aqueles  $\mathcal{A}$  tais que

$$\mathcal{YM}(\mathcal{A}) = \int_{\mathbb{R}^4} \|\mathcal{F}(q)\|^2 d(\text{vol}_{\mathbb{R}^4}) < \infty$$

A fim de garantirmos que  $\mathcal{YM}(\mathcal{A})$  seja finita, é necessário encontrar alguma transformação de calibre local  $g$ , definida para  $|q|$  suficientemente grande, de modo que os potenciais nesse calibre decaiam “suficientemente rápido”. No caso de  $\mathcal{A} = \text{Im} \left( \frac{\bar{q} - \bar{n}}{|q - n|^2 + \lambda^2} dq \right)$  vimos que o calibre apropriado  $g$  é definido em  $\mathbb{R}^4 - \{0\}$  por  $g(q) = q/|q|$  pois  $\mathcal{A}$  é assintoticamente de calibre puro por  $g$ . O essencial aqui é que estas transformações de calibre  $g$  não precisam estar definidas em todo  $\mathbb{R}^4$ . Para vermos isso, considere  $S_r^3$  a esfera de centro na origem em  $\mathbb{R}^4$  e raio suficientemente grande  $r$  contida no domínio de  $g$ . Considere a aplicação

$$g|_{S_r^3} : S_r^3 \rightarrow Sp(1).$$

Como  $S_r^3$  e  $Sp(1)$  são ambos topologicamente 3-esferas,  $g|_{S_r^3}$  pode ser vista como uma aplicação de  $S^3$  em  $S^3$ .  $g|_{S^3}$  pode ser estendida continuamente a  $|q| \leq r$  se, e somente se, é *homotopicamente trivial*. Se  $0 < r_1 \leq r_2$  são suficientemente grandes de modo que  $S_r$  esteja contido no domínio de  $g$  sempre que  $r_1 \leq r \leq r_2$  então  $g|_{S_{r_1}^3}$  e  $g|_{S_{r_2}^3}$  são homotópicas. Para vermos isso, considere  $H : S^3 \times [r_1, r_2] \rightarrow \mathbb{R}^4 - \{0\}$  dada por  $H(x, t) = tx$ . Dado  $g$ ,  $g|_{S_r^3}$  determina um elemento do grupo de homotopia  $\pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$ . Para o potencial de calibre  $\mathcal{A}$ ,  $g$  é dado por  $g(q) = q/|q|$  e esta, restrita à esfera  $S^3$ , é a aplicação identidade. Logo,  $g|_{S_r^3}$  não é homotopicamente trivial, pois  $\deg(id_{S^3}) = 1$  (grau de Brouwer). Veremos que o inteiro  $k$  que corresponde a um dado  $g$  está diretamente relacionado com a “taxa de decaimento” da intensidade de campo quando  $|q| \rightarrow \infty$ .

Vimos na seção anterior que

$$\mathcal{YM}(\mathcal{A}) = \|\mathcal{F}\|^2 = \|\mathcal{F}_+\|^2 + \|\mathcal{F}_-\|^2 \quad (4.2.5)$$

Em particular, todos os potenciais em  $\mathbb{R}^4$  descritos no Teorema 3.2.2 são anti-auto-duais.

Lembremos que a ação finita do potencial de calibre BPST definido por (3.2.9) não é somente um potencial definido no  $Sp(1)$ -fibrado trivial sobre  $\mathbb{R}^4$ . Na verdade, é o pullback para  $\mathbb{R}^4$  de uma conexão no  $Sp(1)$ -fibrado não trivial em  $\mathbb{R}^4$ . Pode-se dizer que a conexão no  $Sp(1)$ -fibrado trivial que corresponde a  $\mathcal{A}$  “estende-se a  $S^4$ ” no sentido que  $S^4$  é a compactificação por um ponto de  $\mathbb{R}^4$  e, devido ao comportamento assintótico de  $\mathcal{A}$  quando  $|q| \rightarrow \infty$ , a conexão estende-se ao ponto no infinito. É importante notar, entretanto, que este processo de extensão envolve, não só a conexão, mas também o próprio fibrado. Um teorema memorável de Karen Uhlenbeck [Uhl82] assegura que o único impedimento para existência desta extensão é o fato da ação ser infinita. O **Teorema de Singularidades Removíveis** de K. Uhlenbeck é muito geral, mas no caso que estamos lidando, é simples de ser enunciado: Seja  $\mathcal{A}$  um potencial de calibre em  $\mathbb{R}^4$  com valores em  $\text{Im}\mathbb{H}$  que satisfaça as equações de Yang-Mills e cuja ação  $\mathcal{YM}(\mathcal{A}) = \int_{\mathbb{R}^4} \|\mathcal{F}(q)\|^2 d(\text{vol}_{\mathbb{R}^4})$  seja finita. Então existe um único  $Sp(1)$ -fibrado  $\mathcal{P} : P \rightarrow S^4$  sobre  $S^4$ , uma 1-forma de conexão  $\omega$  em  $P$

e uma seção transversal  $s : S^4 - \{N\} \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(S^4 - \{N\})$  tal que  $\mathcal{A} = (s \circ \varphi_S^{-1})^* \omega$  onde  $\varphi_S : S^4 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^4$  é a projeção estereográfica a partir do pólo norte  $N$ .

Agora os  $Sp(1)$ -fibrados principais sobre  $S^4$  são caracterizados topologicamente por um inteiro, i.e., por um elemento de  $\pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$  (Teorema de Classificação 2.3.2). Cada inteiro deste invariante pode ser obtido como o grau da aplicação característica  $T : (S^3, N) \rightarrow (Sp(1), e)$  dada por  $T = g|_{S^3}$  do fibrado, onde  $g$  é a função de transição e  $S^3$  é a esfera equatorial de  $S^4$  (ver capítulo 4, seção 4 de [Nab10]). Existe outra maneira de calcular um inteiro  $k$  que determina unicamente a classe de equivalência do fibrado, que é dado por um ramo da topologia conhecido como **classes características**. Embora não seja o objetivo deste trabalho tratar deste assunto, ganhamos um entendimento maior simplesmente registrando, sem prova, a fórmula para calcular este invariante topológico  $k$ . A chamada “fórmula de Chern-Weil” diz que

$$\|\mathcal{F}_+\|^2 - \|\mathcal{F}_-\|^2 = 8\pi^2 k \quad (4.2.6)$$

onde  $\mathcal{F}$  é a intensidade de campo de  $\mathcal{A}$ . Se  $\mathcal{F}$  for anti-auto-dual,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_-$  e  $\mathcal{F}_+ = 0$  então tem-se que

$$k = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \|\mathcal{F}(q)\|^2 d(\text{vol}_{\mathbb{R}^4}) = -\frac{1}{8\pi^2} \mathcal{YM}(\mathcal{A}) \quad (4.2.7)$$

Em particular, para a conexão BPST  $\mathcal{A}$  dada por (4.2.2) encontramos  $\mathcal{YM}(\mathcal{A}) = 8\pi^2$ , então  $k = -1$  para o fibrado de Hopf  $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$ , este geralmente é chamado **número instanton** ou **carga topológica** do fibrado de Hopf. Observe que de (4.2.5) e (4.2.6) temos

$$\mathcal{YM}(\mathcal{A}) \geq 8\pi^2 |k| \quad (4.2.8)$$

Portanto,

$$\mathcal{YM}(\mathcal{A}) = 8\pi^2 |k| \iff \mathcal{F} = (\text{sign } k)(*\mathcal{F}) \quad (4.2.9)$$

Uma consequência imediata de (4.2.8) e (4.2.9) é que um potencial de calibre em  $\mathbb{R}^4$  é um mínimo absoluto do funcional de Yang-Mills se, e somente se,  $\mathcal{F}$  é flat ( $k = 0$ ), auto-dual ( $k > 0$ ) ou anti-auto-dual ( $k < 0$ ). Conexões flat possuem intensidade de campo zero e são estendidas apenas para o fibrado trivial sobre  $S^4$  e não consideraremos mais este caso. Como auto-dual e anti-auto-dual podem ser trocados simplesmente mudando a orientação, podemos restringir nossa atenção apenas a um deles. Pelo fato do fibrado de Hopf ter carga topológica  $k = -1$ , vamos considerar apenas o caso anti-auto-dual. Logo (4.2.7) nos dá o invariante topológico  $k$  do  $Sp(1)$ -fibrado sobre  $S^4$  para o qual um potencial de calibre  $\mathcal{A}$  em  $\mathbb{R}^4$  se estende como um múltiplo da intensidade de campo total. Porém a intensidade de campo total de um potencial de ação finita é determinado inteiramente pela “taxa de decaimento” de  $\|\mathcal{F}(q)\|^2$  na medida que  $|q| \rightarrow \infty$ . É interessante que o comportamento

assintótico da intensidade de campo possa ser diretamente codificada desta maneira na topologia do fibrado sobre  $S^4$  para o qual potenciais de calibre são estendidos. Também é notável o fato que essas intensidades de campo mínimas surgem “quantizadas”, i.e., parametrizadas por inteiros, de modo que naturalmente apresenta-se algo parecido com a condição generalizada de quantização de Dirac.

## 5 Duas Decomposições Do Espaço Moduli e suas Características Geométricas

Neste capítulo final definimos o que é o espaço moduli  $\mathcal{M}$  de conexões ASD do fibrado de Hopf quatérnio e apresentamos duas caracterizações geométricas do mesmo. Apresentamos a primeira caracterização através da decomposição de Iwasawa de  $SL(2n, \mathbb{H})$  e identificamos  $\mathcal{M}$  com  $(0, \infty) \times \mathbb{H}$  tanto como espaço topológico como uma variedade diferenciável. A segunda caracterização vem da decomposição de Cartan também de  $SL(2, \mathbb{H})$  a qual nos permite identificar  $\mathcal{M} - \{[\omega]\}$  com a bola  $B^5 - \{0\}$ . Por fim, comparamos os centros e escalas dos potenciais de ambas decomposições em seus respectivos espaços e analisamos o comportamento das intensidades de campo destes potenciais nos relativos espaços. Seguimos de perto [Nab10] como referência.

### 5.1 O Espaço Moduli e a Decomposição de Iwasawa

**Teorema 5.1.1.** *Sejam  $\mathcal{P}_1 : P_1 \rightarrow X$  e  $\mathcal{P}_2 : P_2 \rightarrow X$  dois  $G$ -fibrados principais sobre o mesmo espaço base  $X$ ,  $f : P_1 \rightarrow P_2$  uma aplicação fibrado suave e  $\omega$  uma forma de conexão em  $P_2$ . Então  $f^*\omega$  é uma forma de conexão de  $P_1$ .*

Vamos aplicar o Teorema 5.1.1 para o caso em que ambos fibrados sejam os fibrados de Hopf quatérnio e  $\omega$  é a forma de conexão BPST natural. Todas as aplicações fibrado através das quais fazemos o pullback surgem de uma ação à esquerda natural  $\rho$  de  $SL(2, \mathbb{H})$  em  $S^7$ . Sejam  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{H})$  e  $\begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} \in S^7$ . Defina  $g \cdot \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} \in S^7$  normalizando

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aq^1 + bq^2 \\ cq^1 + dq^2 \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$g \cdot \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} = (|aq^1 + bq^2|^2 + |cq^1 + dq^2|^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} aq^1 + bq^2 \\ cq^1 + dq^2 \end{pmatrix} \quad (5.1.1)$$

Afirmamos que esta, de fato, é uma ação à esquerda suave de  $SL(2, \mathbb{H})$  em  $S^7$ . Com efeito, escrevendo  $\rho : SL(2, \mathbb{H}) \times S^7 \rightarrow S^7$  então mostramos que

(i) Para todo  $q \in S^7$ , tem-se  $\rho(id, q) = q$ . Basta ver que  $q \in S^7$  implica em  $|q^1|^2 + |q^2|^2 = 1$ . Logo

$$\rho(id, q) = id \cdot \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} = (|q^1|^2 + |q^2|^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix}$$

(ii) Para todo  $q \in S^7$  e todos  $g_1, g_2 \in SL(2, \mathbb{H})$ , tem-se  $\rho(g_1 g_2, q) = \rho(g_1, \rho(g_2, q))$ . Ora, se  $g_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$  e  $g_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$  então  $g_1 g_2 = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \rho(g_1 g_2, q) &= g_1 g_2 \cdot q \\ &= \left( |(a_1 a_2 + b_1 c_2)q^1 + (a_1 a_2 + b_1 c_2)q^2|^2 \right. \\ &\quad \left. + |(c_1 a_2 + d_1 c_2)q^1 + (c_1 b_2 + d_1 d_2)q^2|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \rho(g_1, \rho(g_2, q)) &= g_1 \cdot \rho(g_2, q) \\ &= g_1 \cdot \left( (|a_2 q^1 + b_2 q^2|^2 + |c_2 q^1 + d_2 q^2|^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} a_2 q^1 + b_2 q^2 \\ c_2 q^1 + d_2 q^2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Chame  $\sqrt{C} = (|a_2 q^1 + b_2 q^2|^2 + |c_2 q^1 + d_2 q^2|^2)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\tilde{q}^1 = \frac{a_2 q^1 + b_2 q^2}{\sqrt{C}}$  e  $\tilde{q}^2 = \frac{c_2 q^1 + d_2 q^2}{\sqrt{C}}$ . Então, por definição

$$\begin{aligned} g_1 \cdot \begin{pmatrix} \tilde{q}^1 \\ \tilde{q}^2 \end{pmatrix} &= (|a_1 \tilde{q}^1 + b_1 \tilde{q}^2|^2 + |c_1 \tilde{q}^1 + d_1 \tilde{q}^2|^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} a_1 \tilde{q}^1 + b_1 \tilde{q}^2 \\ c_1 \tilde{q}^1 + d_1 \tilde{q}^2 \end{pmatrix} \\ &= \left( \left| a_1 \frac{a_2 q^1 + b_2 q^2}{\sqrt{C}} + b_1 \frac{c_2 q^1 + d_2 q^2}{\sqrt{C}} \right|^2 + \left| c_1 \frac{a_2 q^1 + b_2 q^2}{\sqrt{C}} + d_1 \frac{c_2 q^1 + d_2 q^2}{\sqrt{C}} \right|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \begin{pmatrix} a_1 \frac{a_2 q^1 + b_2 q^2}{\sqrt{C}} + b_1 \frac{c_2 q^1 + d_2 q^2}{\sqrt{C}} \\ c_1 \frac{a_2 q^1 + b_2 q^2}{\sqrt{C}} + d_1 \frac{c_2 q^1 + d_2 q^2}{\sqrt{C}} \end{pmatrix} \\ &= \left( \left| a_1(a_2 q^1 + b_2 q^2) + b_1(c_2 q^1 + d_2 q^2) \right|^2 + \left| c_1(a_2 q^1 + b_2 q^2) + d_1(c_2 q^1 + d_2 q^2) \right|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C}} \begin{pmatrix} a_1(a_2 q^1 + b_2 q^2) + b_1(c_2 q^1 + d_2 q^2) \\ c_1(a_2 q^1 + b_2 q^2) + d_1(c_2 q^1 + d_2 q^2) \end{pmatrix} \\ &= \left( |(a_1 a_2 + b_1 c_2)q^1 + (a_1 a_2 + b_1 c_2)q^2|^2 \right. \\ &\quad \left. + |(c_1 a_2 + d_1 c_2)q^1 + (c_1 b_2 + d_1 d_2)q^2|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

como queríamos. Logo, para cada  $g \in SL(2, \mathbb{H})$  fixado, a aplicação  $\rho_g : S^7 \rightarrow S^7$  definido por  $\rho_g \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} = g \cdot \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix}$  é um difeomorfismo. Note que  $\rho_g$  preserva a  $Sp(1)$ -ação à direita do fibrado de Hopf em  $S^7$ , i.e., para cada  $q \in S^7$ ,

$$\rho_g \left( \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} \cdot q \right) = \rho_g \begin{pmatrix} q^1 q \\ q^2 q \end{pmatrix} = \rho_g \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} \cdot q$$

Em particular,  $\rho_g$  é uma aplicação fibrado do fibrado de Hopf em si mesmo. Logo, se  $\omega$  é a conexão natural no fibrado de Hopf, o Teorema 5.1.1 garante que  $\rho^*\omega$  também é uma forma de conexão em  $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$ . Agora, faremos o cálculo explícito dos potenciais de calibre  $(s_k \circ \varphi_k^{-1})^*(\rho_g^*\omega)$  como feito no Capítulo 3, pela Proposição 3.1.1 identificaremos  $s_k^*(\rho_g^*\omega)$  com  $(s_k \circ \varphi_k^{-1})^*(\rho_g^*\omega)$ . Assim, para facilitar a escrita, façamos  $s = s_2 \circ \varphi_2^{-1} : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V_2)$  e deixe  $q \in \mathbb{H}$  fixado. Então temos que  $s(q) = (1 + |q|^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ . Identificamos cada  $\mathbf{v}_q \in T_q(\mathbb{H})$  com  $\frac{d}{dt}(q + tv)|_{t=0}$  onde  $dq(\mathbf{v}_q) = v$ . Logo,

$$\begin{aligned} (s^*(\rho_g^*\omega))_q(\mathbf{v}_q) &= ((\rho_g \circ s)^*\omega)_q(\mathbf{v}_q) \\ &= \omega_{\rho_g(s(q))}((\rho_g \circ s)_{*q}(\mathbf{v}_q)) \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

onde

$$(\rho_g \circ s)_{*q}(\mathbf{v}_q) = \frac{d}{dt}((\rho_g \circ s)(q + tv))\Big|_{t=0} \quad (5.1.3)$$

Agora,

$$(\rho_g \circ s)(q + tv) = g \cdot \begin{pmatrix} (1 + |q + tv|^2)^{-\frac{1}{2}}(q + tv) \\ (1 + |q + tv|^2)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Chame  $h(t) = (1 + |q + tv|^2)^{-\frac{1}{2}}$ . Então

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(t)(q + tv) \\ h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ah(t)(q + tv) + bh(t) \\ ch(t)(q + tv) + dh(t) \end{pmatrix}$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned} |ah(t)(q + tv) + bh(t)|^2 &= (ah(t)(q + tv) + bh(t))\overline{(ah(t)(q + tv) + bh(t))} \\ &= (h(t))^2(|a|^2|q + tv|^2 + \overline{a(q + tv)}b + \bar{b}a(q + tv) + |b|^2) \\ &= (h(t))^2(|a|^2(|q|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{q}v)t + |v|^2t^2) + 2\operatorname{Re}(b\overline{a(q + tv)}) + |b|^2) \\ &= (h(t))^2(|a|^2|v|^2t^2 + |a|^2\operatorname{Re}(\bar{q}v)t + |a|^2|q|^2 + 2\operatorname{Re}(b(\bar{q} + \bar{v}t)\bar{a}) + |b|^2) \\ &= (h(t))^2(|a|^2|v|^2t^2 + 2\operatorname{Re}(b\bar{v}\bar{a} + a\bar{q}v\bar{a})t + |b|^2 + |a|^2|q|^2 + 2\operatorname{Re}(b\bar{q}\bar{a})) \end{aligned}$$

o mesmo vale para

$$|ch(t)(q + tv) + dh(t)|^2 = (h(t))^2(|c|^2|v|^2t^2 + 2\operatorname{Re}(d\bar{v}\bar{c} + c\bar{q}v\bar{c})t + |d|^2 + |c|^2|q|^2 + 2\operatorname{Re}(d\bar{q}\bar{c}))$$

Disso, escrevemos a soma

$$|ah(t)(q + tv) + bh(t)|^2 + |ch(t)(q + tv) + dh(t)|^2 = (h(t))^2(At^2 + Bt + C)$$

onde  $A = (|a|^2 + |c|^2)|v|^2$ ,  $B = 2\operatorname{Re}(b\bar{v}\bar{a} + a\bar{q}v\bar{a} + d\bar{v}\bar{c} + c\bar{q}v\bar{c})$  e  $C = |b|^2 + |a|^2|q|^2 + |d|^2 + |c|^2|q|^2$ . Note que todos estes são reais e ainda

$$C = |aq + b|^2 + |cq + d|^2.$$

Observe que  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aq + b \\ cq + d \end{pmatrix}$ . Como  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{H})$  é invertível, segue que  $C$  é estritamente positivo. Agora, temos que

$$(\rho_g \circ s)(q + tv) = (At^2 + Bt + C)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} aq + avt + b \\ cq + cvt + d \end{pmatrix}. \quad (5.1.4)$$

Calculando a derivada coordenada a coordenada em  $t = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dt} \left( \frac{aq + avt + b}{(At^2 + Bt + C)^{\frac{1}{2}}} \right) \right|_{t=0} \\ &= \left( \frac{av(At^2 + Bt + C)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(aq + avt + b)(At^2 + Bt + C)^{-\frac{1}{2}}(2At + B)}{At^2 + Bt + C} \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{av(C)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(C)^{-\frac{1}{2}}(B)}{C} \\ &= C^{-\frac{1}{2}}av - \frac{1}{2}C^{-\frac{3}{2}}B(aq + b) \end{aligned}$$

o mesmo temos para  $\frac{cq + cvt + d}{(At^2 + Bt + C)^{\frac{1}{2}}}$  então segue que

$$(\rho_g \circ s)_{*q}(\mathbf{v}_q) = \begin{pmatrix} C^{-\frac{1}{2}}av - \frac{1}{2}C^{-\frac{3}{2}}B(aq + b) \\ C^{-\frac{1}{2}}cv - \frac{1}{2}C^{-\frac{3}{2}}B(cq + d) \end{pmatrix} \quad (5.1.5)$$

Precisamos calcular  $\omega_{\rho_g(s(q))}$  do vetor tangente dado por (5.1.5). Fazendo  $t = 0$  em (5.1.4) temos que

$$\rho_g(s(q)) = \begin{pmatrix} \frac{aq+b}{\sqrt{C}} \\ \frac{cq+d}{\sqrt{C}} \end{pmatrix}$$

então  $\bar{q}^1(\rho_g(s(q))) = \frac{\bar{q}\bar{a} + \bar{b}}{\sqrt{C}}$  e  $\bar{q}^2(\rho_g(s(q))) = \frac{\bar{q}\bar{c} + \bar{d}}{\sqrt{C}}$ . Logo,

$$\begin{aligned} (\bar{q}^1 d\bar{q}^1)_{\rho_g(s(q))}(\rho_g \circ s)_{*q}(\mathbf{v}_q) &= \frac{\bar{q}\bar{a} + \bar{b}}{\sqrt{C}} \left( C^{-\frac{1}{2}}av - \frac{1}{2}C^{-\frac{3}{2}}B(aq + b) \right) \\ &= \frac{(\bar{q}\bar{a} + \bar{b})av}{C} - \frac{B(\bar{q}\bar{a} + \bar{b})(aq + b)}{2C^2} \\ &= \frac{|a|^2\bar{q}v + \bar{b}av}{C} - \frac{B|aq + b|^2}{2C^2} \end{aligned}$$

do mesmo modo,

$$(\bar{q}^2 d\bar{q}^2)_{\rho_g(s(q))}(\rho_g \circ s)_{*q}(\mathbf{v}_q) = \frac{|c|^2\bar{q}v + \bar{b}cv}{C} - \frac{B|cq + d|^2}{2C^2}$$

Consequentemente,



$$\begin{aligned}
& \text{Im}(\bar{q}^1 dq^1 + \bar{q}^2 dq^2)_{\rho_g(s(q))}(\rho_g \circ s)_{*q}(\mathbf{v}_q) \\
&= \text{Im} \left( \frac{(|a|^2 + |c|^2) \bar{v} + (\bar{b}a + \bar{d}c) v}{|aq + b|^2 + |cq + d|^2} \right) \\
&= \text{Im} \left( \frac{(|a|^2 + |c|^2) \bar{q} + (\bar{b}a + \bar{d}c)}{|aq + b|^2 + |cq + d|^2} dq(\mathbf{v}_q) \right)
\end{aligned}$$

Concluimos de (5.1.2) que, para  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{H})$ ,

$$(s_2 \circ \varphi_2^{-1})^* (\rho_g^* \omega) = \text{Im} \left( \frac{(|a|^2 + |c|^2) \bar{q} + (\bar{b}a + \bar{d}c)}{|aq + b|^2 + |cq + d|^2} dq \right) \quad (5.1.6)$$

De maneira análoga encontramos

$$(s_1 \circ \varphi_1^{-1})^* (\rho_g^* \omega) = \text{Im} \left( \frac{(|b|^2 + |d|^2) \bar{q} + (\bar{a}b + \bar{c}d)}{|bq + a|^2 + |dq + c|^2} dq \right) \quad (5.1.7)$$

De acordo com a unicidade do Teorema 4.2.1, a conexão  $\rho_g^* \omega$  fica completamente determinada pelo par de pullbacks  $\{s_1^*(\rho_g^* \omega), s_2^*(\rho_g^* \omega)\}$ , i.e., pelas 1-formas (5.1.6) e (5.1.7) em  $\mathbb{H}$ . Neste caso, podemos dizer mais ainda. Qualquer conexão  $\eta$  no fibrado de Hopf é unicamente determinado por *apenas um* dos potenciais de calibre  $s_1^* \eta$  ou  $s_2^* \eta$ . A razão disso é que uma vez dado, digamos,  $s_1^* \eta$  em  $V_1$ , então a lei de transformação  $s_2^* \eta = ad_{g^{-1}} \circ s_1^* \eta$  determina de maneira única  $s_2^* \eta$  em  $V_2 \cap V_1$ . Mas em  $V_2 \cap V_1$  falta apenas um ponto de  $V_2$ , então por continuidade determina  $s_2^* \eta$  em todo  $V_2$ . Por esta razão é comum encontrar-se na literatura uma conexão do fibrado de Hopf representado por somente uma 1-forma de conexão em  $\mathbb{R}^4$  com valores em  $\text{Im}\mathbb{H}$ .

A seguir mostramos um resultado que mostra que  $\rho_g$  é invariante por um subgrupo de  $SL(2, \mathbb{H})$ .

**Proposição 5.1.1.** *Sejam  $\rho : SL(2, \mathbb{H}) \times S^7 \rightarrow S^7$  a ação à direita dada por*

$$\rho(g, q) = g \cdot \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} = (|aq^1 + bq^2|^2 + |cq^1 + dq^2|^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} aq^1 + bq^2 \\ cq^1 + dq^2 \end{pmatrix}$$

*e  $\omega$  a forma de conexão natural do fibrado de Hopf. Então*

$$\rho_g^* \omega = \omega \iff g \in Sp(2) \subseteq SL(2, \mathbb{H}) \quad (5.1.8)$$

**Demonstração.** Suponha  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(2)$ . Então  $\bar{g}^T g = id$  implica que  $|a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1$  e  $\bar{a}b + \bar{c}d = \bar{b}a + \bar{d}c = 0$ . Além disso,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aq + b \\ cq + d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bq + a \\ dq + c \end{pmatrix}$$

e, como os elementos de  $Sp(2)$  preservam a forma bilinear em  $\mathbb{H}^2$ ,  $|aq + b|^2 + |cq + d|^2 = |bq + a|^2 + |dq + c|^2 = 1 + |q|^2$ . substituindo todos estes em (5.1.6) e (5.1.7) obtemos

$$(s_2 \circ \varphi_2^{-1})^*(\rho_g^* \omega) = \text{Im} \left( \frac{\bar{q}}{1 + |q|^2} dq \right) = (s_2 \circ \varphi_2^{-1})^* \omega$$

$$(s_1 \circ \varphi_1^{-1})^*(\rho_g^* \omega) = \text{Im} \left( \frac{\bar{q}}{1 + |q|^2} dq \right) = (s_2 \circ \varphi_2^{-1})^* \omega$$

Logo  $\rho_g^* \omega = \omega$ . Reciprocamente, suponha que  $\rho_g^* \omega = \omega$ . Então o lado direito de (5.1.6) é apenas  $(s_2 \circ \varphi_2^{-1})^* \omega$ , isso implica que  $|a|^2 + |c|^2 = 1$  e  $\bar{b}a + \bar{d}c = 0$  (então  $\bar{a}b + \bar{c}d$ ) e  $|aq + b|^2 + |cq + d|^2 = |bq + a|^2 + |dq + c|^2 = 1 + |q|^2$ . Fazendo  $q = 0$  na última igualdade obtemos  $|b|^2 + |d|^2 = 1$ . Juntando estas informações temos que

$$\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

portanto  $g \in Sp(2)$ . ■

Vamos examinar, com mais detalhes, as conexões  $\rho_g^* \omega$  para  $g$  em dois subgrupos de  $SL(2, \mathbb{H})$ . Primeiro considere

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; n \in \mathbb{H} \right\}$$

De fato  $N$  é um subgrupo de  $SL(2, \mathbb{H})$ . Primeiro, façamos o cálculo de  $\phi \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (ver (2.2.1)). Seja  $n = n^1 + n^2 \mathbf{j}$ , onde  $n^1, n^2 \in \mathbb{C}$ . Então

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{j}$$

Portanto

$$\phi \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n^1 & 0 & n^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{n}^2 & 1 & \bar{n}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como  $\det \phi \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$  então  $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{H})$ . Além disso,  $N$  é fechado em relação à multiplicação de matrizes. De fato, sejam  $\begin{pmatrix} 1 & n_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & n_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$  dadas quaisquer, então temos

$$\begin{pmatrix} 1 & n_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n_1 + n_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$$

$$\begin{pmatrix} 1 & n_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -n_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$$

Concluimos então, que  $N$  é um subgrupo de  $SL(2, \mathbb{H})$ .

A seguir, considere o conjunto

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}; \lambda > 0 \right\}$$

Para qualquer  $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \in A$  temos claramente que  $\det \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} = 1$ , portanto  $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{H})$ . Mostremos que  $A$  é fechado em relação à multiplicação de matrizes. Para isso, tome  $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} \in A$  quaisquer. Logo,

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \end{pmatrix} \in A, \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda_1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_1} \end{pmatrix} \in A \quad \lambda_1 > 0$$

Disso concluímos que  $A$  também é um subgrupo de  $SL(2, \mathbb{H})$  e portanto o conjunto

$$\begin{aligned} NA &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}; n \in \mathbb{H}, \lambda > 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & n/\sqrt{\lambda} \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}; n \in \mathbb{H}, \lambda > 0 \right\} \end{aligned}$$

está contido em  $SL(2, \mathbb{H})$ . Para  $g = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & n/\sqrt{\lambda} \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \in NA$  queremos calcular  $\rho_{g^{-1}}^* \omega$  (o motivo do inverso de  $g$  será explicado em breve). Agora,

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda} & -n/\sqrt{\lambda} \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

onde  $a = 1/\sqrt{\lambda}$ ,  $b = -n/\sqrt{\lambda}$ ,  $c = 0$  e  $d = \sqrt{\lambda}$ . Assim,  $|a|^2 + |c|^2 = 1/\lambda$ ,  $\bar{b}a + \bar{d}c = -\bar{n}/\lambda$ ,  $|aq + b|^2 = \frac{1}{\lambda}|q - n|^2$  e  $|cq + b|^2 = \lambda$  então (5.1.6) nos dá

$$(s_2 \circ \varphi_2^{-1})^*(\rho_{g^{-1}}^* \omega) = \text{Im} \left( \frac{\bar{q} - \bar{n}}{|q - n|^2 + \lambda^2} dq \right) \quad (5.1.9)$$

Analogamente,

$$(s_1 \circ \varphi_1^{-1})^*(\rho_{g^{-1}}^* \omega) = \text{Im} \left( \frac{(|n|^2 + \lambda^2)\bar{q} - n}{|1 - nq|^2 + \lambda^2|q|^2} dq \right) \quad (5.1.10)$$

Os potenciais de calibre  $\mathcal{A}_{\lambda,n} = (s_2 \circ \varphi_2^{-1})^*(\rho_{g^{-1}}^*\omega)$  são chamados **potenciais BPST genéricos**. Vamos escrever (5.1.9) e (5.1.10) em  $\varphi_1$ - e  $\varphi_2$ -coordenadas em  $V_2 \cap V_1$ . Para  $p \in V_2$  e  $\mathbf{X} \in T_p(S^4)$ , (5.1.9) nos dá

$$\begin{aligned} \left(s_2^*(\rho_{g^{-1}}^*\omega)\right)_p \mathbf{X} &= \left((s_2 \circ \varphi_2^{-1})^*(\rho_{g^{-1}}^*\omega)\right)_{\varphi_2(p)} ((\varphi_2)_{*p} \mathbf{X}) \\ &= \text{Im} \left( \frac{\overline{\varphi_2(p)} - \bar{n}}{|\varphi_2(p) - n|^2 + \lambda^2} w \right) \end{aligned}$$

onde  $dq((\varphi_2)_{*p} \mathbf{X}) = w$ . De modo semelhante, para  $p \in V_1$  e  $\mathbf{X} \in T_p(S^4)$ , segue de (5.1.10) que

$$\begin{aligned} \left(s_2^*(\rho_{g^{-1}}^*\omega)\right)_p \mathbf{X} &= \left((s_2 \circ \varphi_2^{-1})^*(\rho_{g^{-1}}^*\omega)\right)_{\varphi_2(p)} ((\varphi_2)_{*p} \mathbf{X}) \\ &= \text{Im} \left( \frac{(|n|^2 + \lambda^2)\overline{\varphi_1(p)} - n}{|1 - n\varphi_1(p)|^2 + \lambda^2|\varphi_1(p)|^2} v \right) \end{aligned}$$

onde  $dq((\varphi_1)_{*p} \mathbf{X}) = v$ . Mostraremos esta última igualdade em termos de  $\varphi_2$  explicitamente. Para  $p \in V_1 \cap V_2$  e  $\mathbf{X} \in T_p(S^4)$  tome  $p = \varphi_2^{-1}(q)$ , onde  $q \in \varphi_2(V_1 \cap V_2) = \mathbb{H} - \{0\}$ . Como  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = q^{-1}$ , segue que  $p = \varphi_1^{-1}(q^{-1})$ . Em seguida, Suponha  $\mathbf{X} = (\varphi_2^{-1})_{*q}(\mathbf{w}_q)$ . Como  $(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})_{*q} = (\varphi_1)_{*p} \circ (\varphi_2^{-1})_{*q}$ , temos

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (\varphi_2^{-1})_{*q}(\mathbf{w}_q) = (\varphi_1^{-1})_{\varphi_1(p)} \circ (\varphi_1)_{*p} \circ (\varphi_2^{-1})_{*q}(\mathbf{w}_q) \\ &= (\varphi_1^{-1})_{*q^{-1}} \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})_{*q}(\mathbf{w}_q) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left(s_1^*(\rho_{g^{-1}}^*\omega)\right)_p \mathbf{X} &= (\rho_{g^{-1}}^*\omega)_{s_1(p)} \left( (s_1)_{*p} \circ (\varphi_1^{-1})_{*q^{-1}} \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})_{*q}(\mathbf{w}_q) \right) \\ &= (\rho_{g^{-1}}^*\omega)_{s_1(\varphi_1^{-1}(q^{-1}))} \left( (s_1 \circ \varphi^{-1})_{*q^{-1}} \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})_{*q}(\mathbf{w}_q) \right) \\ &= \left( (s_1 \circ \varphi^{-1})^*(\rho_{g^{-1}}^*\omega) \right)_{*q^{-1}} \left( (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})_{*q}(\mathbf{w}_q) \right) \\ &= \text{Im} \left( \frac{(|n|^2 + \lambda^2)\overline{q^{-1}} - n}{|1 - n(q^{-1})|^2 + \lambda^2|q^{-1}|^2} v \right) \end{aligned}$$

onde  $dq((\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})_{*q}(\mathbf{w}_q)) = v$ . Já mostramos que

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})_{*q}(\mathbf{w}_q) = \frac{\bar{w}}{|q|^2} - \frac{2\text{Re}(w\bar{q})\bar{q}}{|q|^4}$$

onde  $\mathbf{w}_q$  é identificado com  $\frac{d}{dt}(q + wt)\Big|_{t=0}$ . Agora  $|1 - nq^{-1}|^2 = \frac{1}{|q|^2}|q - n|^2\overline{q^{-1}} = \frac{q}{|q|^2}$  e  $|q^{-1}|^2 = \frac{|q|^2}{|q|^4} = \frac{1}{|q|^2}$ . Então,

$$\frac{(|n|^2 + \lambda^2)\frac{q}{|q|^2} - n}{\frac{1}{|q|^2}|q - n|^2 + \frac{\lambda^2}{|q|^2}} = \frac{(|n|^2 + \lambda^2)q - n|q|^2}{|q - n|^2 + \lambda^2}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left(s_1^*(\rho_{g^{-1}}^*\omega)\right)_p \mathbf{X} &= \text{Im} \left( \frac{(|n|^2 + \lambda^2)q\bar{w} - n\bar{q}q\bar{w}}{|q|^2(|q - n|^2 + \lambda^2)} \right) \\ &= \text{Im} \left( \frac{(|n|^2 + \lambda^2)q\bar{w} + n\bar{q}w\bar{q}}{|q|^2(|q - n|^2 + \lambda^2)} \right) \end{aligned}$$

onde  $p = \varphi_2^{-1}(q)$ ,  $\mathbf{X} = (\varphi_2^{-1})_{*q}(\mathbf{w}_q)$ . A segunda igualdade vem do fato direto que  $\text{Im}(w\bar{q}) = -\text{Im}(\bar{q}w)$ . Em detalhes, para cada  $p \in V_1 \cap V_2$  e cada  $\mathbf{X} \in T_p(S^4)$ ,

$$\left(s_1^*(\rho_{g^{-1}}^*\omega)\right)_p \mathbf{X} = \text{Im} \left( \frac{(|n|^2 + \lambda^2)\varphi_2(p)\bar{w} + n\overline{\varphi_2(p)}w\overline{\varphi_2(p)}}{|\varphi_2(p)|^2(|\varphi_2(p) - n|^2 + \lambda^2)} \right) \quad (5.1.11)$$

onde  $dq((\varphi_2)_{*p}\mathbf{X}) = w$  e  $dq((\varphi_1)_{*p}\mathbf{X}) = v$ .

Um cálculo análogo mostra que a partir de (5.1.10), para cada  $p \in V_1 \cap V_2$  e cada  $\mathbf{X} \in T_p(S^4)$  tem-se que

$$\left(s_2^*(\rho_{g^{-1}}^*\omega)\right)_p \mathbf{X} = \text{Im} \left( \frac{\varphi_1(p)\bar{v} + n\overline{\varphi_1(p)}v\overline{\varphi_1(p)}}{|\varphi_1(p)|^2(|n\varphi_1(p)|^2 + \lambda^2|\varphi_1(p)|^2)} \right) \quad (5.1.12)$$

onde  $dq((\varphi_2)_{*p}\mathbf{X}) = w$  e  $dq((\varphi_1)_{*p}\mathbf{X}) = v$ .

Temos agora uma coleção substancial de formas de conexão em  $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$ . Temos mais do que isso, se denotarmos por  $\mathcal{A}$  o conjunto de todas as formas de conexão em  $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$ , então a ação natural à esquerda de  $SL(2, \mathbb{H})$  em  $S^7$  dada por (5.1.1) dá origem à ação à esquerda de  $SL(2, \mathbb{H})$  em  $\mathcal{A}$  definida por

$$\begin{aligned} SL(2, \mathbb{H}) \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ (g, \boldsymbol{\eta}) &\mapsto g \cdot \boldsymbol{\eta} = \rho_{g^{-1}}^* \boldsymbol{\eta} \end{aligned}$$

o fato de ser uma ação à esquerda vem de

$$\begin{aligned} (gh, \boldsymbol{\eta}) &\mapsto (gh) \cdot \boldsymbol{\eta} = \rho_{(gh)^{-1}}^* \boldsymbol{\eta} = \rho_{h^{-1}g^{-1}}^* \boldsymbol{\eta} \\ &= (\rho_{h^{-1}} \circ \rho_{g^{-1}})^* \boldsymbol{\eta} \\ &= \rho_{g^{-1}}^* \circ \rho_{h^{-1}}^* (\boldsymbol{\eta}) \\ &= \rho_{g^{-1}}^* (h \cdot \boldsymbol{\eta}) \\ &= g \cdot (h \cdot \boldsymbol{\eta}) \end{aligned}$$

(o inverso de  $g^{-1}$  é usado para compensar o pullback).

Considere o subconjunto  $NASp(2) = \{g_1 g_2 g_3 \in SL(2, \mathbb{H}); g_1 \in N, g_2 \in A, g_3 \in Sp(2)\}$  de  $SL(2, \mathbb{H})$ . Se  $\omega$  é a conexão natural do fibrado de Hopf, então

$$(g_1 g_2 g_3) \cdot \omega = (g_1 g_2) \cdot (g_3 \omega) = (g_1 g_2) \cdot \omega$$

pois  $g_3 \cdot \omega = \rho_{g_3^{-1}}^* \omega = \omega$  por (5.1.8). Como já calculamos  $(g_1 g_2) \cdot \omega$  para  $g_1 \in N$  e  $g_2 \in A$ ,  $g \cdot \omega$  fica determinado para todo  $g \in NASp(2)$ . Embora esteja longe de ser óbvio,  $NASp(2)$  na verdade é *todo*  $SL(2, \mathbb{H})$ . Esta é chamada **decomposição de Iwasawa** de  $SL(2, \mathbb{H})$ :

$$SL(2, \mathbb{H}) = NASp(2) \quad (5.1.13)$$

a prova desta decomposição se encontra em [Hel62]. Por meio de (5.1.13) identificamos a órbita de  $\omega$  em relação à ação de  $SL(2, \mathbb{H})$  em  $\mathcal{A}$ . Voltaremos nesta decomposição em breve.

O Teorema 5.1.1 expõe outro assunto de interesse neste trabalho, a saber: quando duas conexões são suficientemente distintas em um fibrado para que devêssemos distinguí-las? Considere, por exemplo, as 1-formas em  $\mathbb{H}$  com valores em  $\text{Im}\mathbb{H}$

$$\frac{|q|^2}{1+|q|^2}\text{Im}(q^{-1}dq) \text{ e } \frac{1}{1+|q|^2}\text{Im}(\bar{q}^{-1}d\bar{q})$$

Cada uma destas pode ser identificada (pelo Teorema 4.2.1) com uma única conexão no  $Sp(1)$ -fibrado trivial sobre  $\mathbb{H} - \{0\}$ . Ora, pensando desta maneira, elas parecem ser bem diferentes pois possuem valores nos vetores tangentes aos pontos de  $\mathbb{H} - \{0\}$  e possuem um comportamento assintótico bem distinto quando  $|q| \rightarrow \infty$ . Entretanto, sabemos mais acerca destas duas 1-formas. De fato, as equações (3.1.15) e (3.1.16) mostram que são pullbacks para  $\mathbb{H} - \{0\}$  da *mesma* forma de conexão  $\omega$  no fibrado de Hopf através de duas seções transversais distintas do fibrado. Consequentemente, elas diferem apenas pela que chamamos de transformação de calibre (local) e, devido à correspondência biúnivoca entre seções transversais e trivializações (pag. 58), isso significa que diferem apenas por uma maneira particular pela qual o fibrado é trivializado. Como tais, elas deveriam ser consideradas como duas expressões coordenadas distintas de um mesmo objeto geométrico e desse modo devem ser vistas como “equivalentes”. A seguir, formalizaremos isso.

Uma transformação de calibre local é uma mudança de seção transversal e todas estas mudanças surgem da seguinte maneira: Sejam  $s : V \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V)$  uma seção transversal local e  $g : V \rightarrow G$  uma aplicação suave. Defina  $s^g : V \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V)$  pondo  $s^g(x) = s(x) \cdot g(x)$ , para todo  $x \in V$ . Então  $s^g$  também é uma seção transversal local, de modo que

$$\mathcal{P}^{-1}(V) = \bigcup_{x \in V} \{s(x) \cdot h; h \in G\} = \bigcup_{x \in V} \{s^g(x) \cdot h; h \in G\}$$

Dessa forma, podemos definir uma aplicação  $f : \mathcal{P}^{-1}(V) \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V)$  por  $f(s(x) \cdot h) = s^g(x) \cdot h$ . Afirmamos que  $f$  é um automorfismo suave do  $G$ -fibrado  $\mathcal{P} : \mathcal{P}^{-1}(V) \rightarrow V$ . De fato, como  $s$  e  $g$  são suaves segue que  $s^g$  é suave, e consequentemente,  $f$  é suave. Além disso, por  $\mathcal{P}$  ser invariante nas fibras temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \circ f(s(x) \cdot h) &= \mathcal{P}(s^g \cdot h) = \mathcal{P}(s^g(x)) \\ &= (s(x) \cdot g(x)) = \mathcal{P}(s(x)) = x \end{aligned}$$

para todo  $x \in V$ . Por outro lado,  $\mathcal{P}(s(x) \cdot h) = \mathcal{P}(s(x)) = x$  para todo  $x \in V$ . Portanto,  $\mathcal{P} \circ f = \mathcal{P}$  e  $f$  é um automorfismo fibrado de  $\mathcal{P} : \mathcal{P}^{-1}(V) \rightarrow V$ . Reciprocamente, suponha que seja dado um automorfismo  $f$  do fibrado  $\mathcal{P}^{-1}(V)$  em si mesmo. Se  $s : V \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V)$  é qualquer seção transversal, definimos uma outra aplicação de  $V$  em  $\mathcal{P}^{-1}(V)$  pondo  $x \mapsto f^{-1}(s(x))$ . Como  $f^{-1}$  é também um automorfismo fibrado, esta aplicação é uma seção transversal em  $V$ , pois

$$\mathcal{P}(f^{-1}(s(x))) = \mathcal{P}(s(x)) = x$$

Logo, para cada  $x \in V$  existe um único  $g(x) \in G$  tal que  $f^{-1}(s(x)) = s(x) \cdot g(x)$ . Resta mostrar que  $g$ , assim definida, é uma aplicação suave. Com efeito,  $g$  pode ser vista como a composição das seguintes aplicações suaves

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{s} \mathcal{P}^{-1}(V) \xrightarrow{f^{-1}} \mathcal{P}^{-1}(V) \xrightarrow{\psi} G \\ x &\longmapsto s(x) \longmapsto f^{-1}(s(x)) = s(x) \cdot g(x) \longmapsto g(x) \end{aligned}$$

onde  $\psi$  é definida na pág. 43.

Consequentemente, uma transformação de calibre em  $V \subset X$  pode ser identificada com um autormorfismo do fibrado  $\mathcal{P}^{-1}(V)$ . Então se  $\mathcal{P} : P \rightarrow X$  é um  $G$ -fibrado principal sobre  $X$ , então uma **transformação de calibre (global)** é um automorfismo do fibrado, i.e., um difeomorfismo  $f : P \rightarrow P$  que preserva fibras de  $\mathcal{P}$  ( $\mathcal{P} \circ f = \mathcal{P}$ ) e comuta com a ação de  $G$  sobre  $P$  ( $f(p \cdot g) = f(p) \cdot g$ ). Como composições e inversos de automorfismo são ainda automorfismos, a coleção de todas transformações de calibre de  $\mathcal{P} : P \rightarrow X$  forma um grupo sob composição, chamado **grupo de transformações de calibre** de  $\mathcal{P} : P \rightarrow X$  e será denotado por  $\mathcal{G}(P)$ . Agora, se  $\omega$  é uma forma de conexão no fibrado e  $f \in \mathcal{G}(P)$ , então, pelo Teorema 5.1.1,  $f^*\omega$  também é uma forma de conexão no mesmo fibrado. Duas conexões  $\omega$  e  $\eta$  são ditas **equivalentes por calibre** se existe um  $f \in \mathcal{G}(P)$  tal que  $\eta = f^*\omega$ . Afirmamos, que de fato, esta é uma relação de equivalência no conjunto de todas as formas de conexão de  $P$ ,  $\mathcal{A}(P)$ .

(i)  $\omega \sim \omega$ . É imediato, uma vez que  $id \in \mathcal{G}(P)$ .

(ii)  $\omega \sim \eta \implies \eta \sim \omega$ . Com efeito, se  $\omega \sim \eta$  então existe  $f \in \mathcal{G}(P)$  tal que  $\eta = f^*\omega$ . Então

$$(f^{-1})^*\eta = (f^{-1})^* \circ f^*(\omega) = (f \circ f^{-1})^*\omega = id^*\omega = \omega$$

(iii)  $\omega \sim \eta$  e  $\mu \sim \eta \implies \omega \sim \mu$ . Existem  $f, g \in \mathcal{G}(P)$  tais  $\eta = f^*\omega$  e  $\mu = f^*\eta$ . Logo

$$\mu = g^*(f^*\omega) = g^* \circ f^*(\omega) = (f \circ g)^*\omega$$

como  $f \circ g \in \mathcal{G}(P)$  temos o que queríamos.

O conjunto  $\mathcal{A}(P)/\mathcal{G}(P)$  das classes de equivalência por calibre de em  $P$  é chamado de **espaço moduli de conexões** no fibrado. Estes espaços tornaram-se, desde Simon Donaldson, objetos de profunda significância para topologia. Para os físicos estes representam os espaços de configuração das teorias de campo quântico e, como tais, são variedades nas quais as integrais de caminho de Feymann são definidas e avaliadas.

É importante notar que se  $f$  é um automorfismo e  $s : V \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V)$  é uma seção transversal, então  $s^*(f^*\omega) = (f \circ s)^*\omega$ . Como  $f \circ s : V \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V)$  também é uma seção transversal, então concluímos que  $s^*\omega$  e  $s^*(f^*\omega)$  são, de fato, ambos potenciais de calibre de  $\omega$  (por seções transversais distintas). Consequentemente, eles estão relacionados por uma lei de transformação de calibre do tipo (2.4.3).

Agora, mostraremos um difeomorfismo que nos será muito útil em instantes. Cada  $\mathcal{A}_{\lambda,n}$  é determinado por um ponto  $(\lambda, n)$  em  $(0, \infty) \times \mathbb{H}$ . Mostremos que  $(0, \infty) \times \mathbb{H}$  é difeomorfo ao disco aberto de dimensão 5. Para isso, considere  $(0, \infty) \times \mathbb{H}$  como um subconjunto de  $\mathbb{R}^6$ , com  $x^6 = 0$  e  $x^1 = \lambda > 0$  ( $x^2, x^3, x^4$  e  $x^5$  são as coordenadas usuais  $q^0, q^1, q^2, q^3$  em  $\mathbb{H}$ ). Denotamos por  $S^4$  o equador ( $x^6 = 0$ ) de  $S^5$  e por  $B^5$  a bola de dimensão 5 interior a  $S^4$ , i.e.,

$$B^5 = \{(x^1, \dots, x^5, 0) \in \mathbb{R}^6; (x^1)^2 + \dots + (x^5)^2 < 1\}$$

Seja  $\varphi_S : S^5 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{H}$  a projeção estereográfica pelo pólo norte. Note que  $\varphi_S^{-1}$  leva  $(0, \infty) \times \mathbb{H}$  no hemisfério “frontal”  $S_F^5 = \{(x^1, \dots, x^6) \in S^5; x^1 > 0\}$  de  $S^5$ . Seja  $R$  a rotação em  $\mathbb{R}^6$  por  $\frac{\pi}{2}$  que deixa  $x^2, \dots, x^5$  fixos e leva  $N = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$  em  $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ , i.e.,

$$R(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6) = (x^6, x^2, x^3, x^4, x^5, -x^1)$$

para todo  $(x^1, \dots, x^6)$  em  $\mathbb{R}^6$ . Então  $R$  leva  $S_F^5$  no hemisfério “inferior”  $S_L^5 = \{(x^1, \dots, x^6) \in S^5; x^6 < 0\}$ . Finalmente, note que  $\varphi_S$  leva  $S_L^5$  em  $B^5$ . Além disso, é possível mostrar que o determinante de  $\varphi_S \circ R \circ \varphi_S^{-1}$  é estritamente positivo, portanto é um difeomorfismo de  $(0, \infty) \times \mathbb{H}$  em  $B^5$  conforme que preserva orientação.

Pelo Teorema 3.2.2 obtemos uma coleção de conexões ASD no fibrado de Hopf quaternio. Cada um desses surgem de um potencial de calibre  $\mathcal{A}_{\lambda,n}$  em  $\mathbb{R}^4$  com intensidade de campo ASD  $\mathcal{F}_{\lambda,n}$  e com ação de Yang-Mills  $\mathcal{YM}(\mathcal{A}_{\lambda,n}) = 8\pi^2$ . Temos interesse nas classes de equivalência de calibre destas conexões. Definimos o **espaço moduli de conexões ASD no fibrado de Hopf**  $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$  como o conjunto  $\mathcal{M}$  das classes de equivalência de calibre das formas de conexão ASD em  $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$ . Desse modo, a conexão natural  $\omega$ , assim como cada  $g \cdot \omega$  para  $g \in SL(2, \mathbb{H})$ , determina um ponto no espaço moduli que consiste de todas as conexões ASD no fibrado Hopf que são equivalentes por calibre a estes. Entretanto, estes não determinam os pontos todos diferentes, pois como já vimos,  $g \cdot \omega = \omega$  se  $g \in Sp(2)$ .

**Lema 5.1.1.** *Seja  $\omega$  a conexão natural em  $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$  e sejam dados  $g, g' \in Sp(2)$ . Então,  $g' \cdot \omega = g \cdot \omega \iff g^{-1}g' \in Sp(2)$ , se, e somente se,  $g'$  esta na classe lateral  $gSp(2)$ .*

**Demonstração.** Temos que  $\rho$  é um homomorfismo. Segue da Proposição 5.1.1

$$\begin{aligned} g' \cdot \omega = g \cdot \omega &\iff \rho_{g^{-1}}^* \omega = \rho_{(g')^{-1}}^* \omega \iff \omega = \rho_g(\rho_{(g')^{-1}}^* \omega) \\ &\iff \omega = (\rho_g^* \circ \rho_{(g')^{-1}}^*) \omega \\ &= (\rho_{(g')^{-1}} \circ \rho_g)^* \omega = \rho_{(g')^{-1}g}^* \omega = (g^{-1}g') \cdot \omega \\ &\iff g^{-1}g \in Sp(2) \iff g^{-1} \in g \cdot Sp(2) \end{aligned}$$

■



Em particular a aplicação  $f : SL(2, \mathbb{H}) \rightarrow \mathcal{M}$  dada por  $f(g) = [g \cdot \omega]$  é constante em cada classe lateral  $gSp(2)$  em  $SL(2, \mathbb{H})$ . Portanto, esta aplicação descende para uma aplicação quociente de  $SL(2, \mathbb{H})/Sp(2)$  em  $\mathcal{M}$  de modo que o seguinte diagrama seja comutativo

$$\begin{array}{ccc} SL(2, \mathbb{H}) & \xrightarrow{f} & \mathcal{M} \\ \mathcal{Q} \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ SL(2, \mathbb{H})/Sp(2) & & \end{array}$$

onde  $\mathcal{Q} : SL(2, \mathbb{H}) \rightarrow SL(2, \mathbb{H})/Sp(2)$  é a aplicação quociente no espaço das classes laterais à esquerda  $SL(2, \mathbb{H})/Sp(2)$  dada por  $\mathcal{Q}(g) = [g]$ .

**Teorema 5.1.2.** *(O Teorema de Atiyah-Hitchin-Singer [AHS78]) A aplicação*

$$\bar{f} : SL(2, \mathbb{H})/Sp(2) \rightarrow \mathcal{M}$$

dada por  $\bar{f}([g]) = [g \cdot \omega]$ , onde  $\mathcal{M}$  é o espaço moduli das conexões ASD no fibrado de Hopf  $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$ , é uma bijeção.

**Observação 5.1.1.** Para mostrar que  $\bar{f}$  é injetiva precisamos mostrar que  $g' \cdot \omega$  é equivalente por calibre a  $g \cdot \omega$  somente se  $g'$  pertence à classe lateral  $gSp(2)$ . Ora, ambos  $g' \cdot \omega$  e  $g \cdot \omega$  são unicamente determinados pelos potenciais de calibre  $\mathcal{A}_{\lambda', n'}$  e  $\mathcal{A}_{\lambda, n}$  com intensidades de campos correspondentes  $\mathcal{F}_{\lambda', n'}$  e  $\mathcal{F}_{\lambda, n}$ , respectivamente. Agora, se  $g' \cdot \omega$  e  $g \cdot \omega$  são equivalentes por calibre, então as intensidades de campo estão relacionadas pela lei de transformação (2.4.18). Mas isso implica que  $\|\mathcal{F}_{\lambda', n'}(q)\|^2 = \|\mathcal{F}_{\lambda, n}(q)\|^2$  para cada  $q \in \mathbb{R}^4$  e isto só é possível se  $\lambda' = \lambda$  e  $n' = n$  (Teorema 3.2.2). Assim,  $\mathcal{A}_{\lambda', n'} = \mathcal{A}_{\lambda, n}$ . Logo  $g' \cdot \omega = g \cdot \omega$  e o Lema 5.1.1 implica que  $g' \in gSp(2)$ , como queríamos. A sobrejetividade de  $\bar{f}$ , ou seja, o fato de que qualquer classe de equivalência de calibre das conexões ASD do fibrado de Hopf é representada por algum  $g \cdot \omega$ ,  $g \in SL(2, \mathbb{H})$  e  $\omega$  sendo a conexão natural, é um assunto mais delicado. A prova envolve resultados profundos de cohomologia de sheaf e geometria algébrica.

Agora estamos em posição de apresentar a primeira característica geométrica do espaço moduli  $\mathcal{M}$  das conexões ASD. Pela decomposição de Iwasawa todo  $g \cdot \omega$  é unicamente determinado por um potencial BPST  $\mathcal{A}_{\lambda, n}$  e portanto, por um par  $(\lambda, n)$ , onde  $\lambda > 0$  e  $n \in \mathbb{H}$ . O Teorema de Atiyah-Hitchin-Singer e o argumento da observação que segue implicam que os pontos do espaço moduli  $\mathcal{M}$  estão em correspondência biunívoca com o conjunto de todos os pares  $(\lambda, n)$ , i.e., com os pontos do espaço  $(0, \infty) \times \mathbb{H}$  em  $\mathbb{R}^5$ . Intuitivamente, pontos “vizinhos”  $(\lambda, n)$  e  $(\lambda', n')$  em  $(0, \infty) \times \mathbb{H}$  dão origem a conexões cujos potenciais de calibre estão “próximos” no sentido de que suas intensidades de campo estão centradas em pontos próximos e possuem aproximadamente a mesma escala (ver Figura 4.1). Sabe-se (pag 243 - [Nab10]) que quaisquer duas estruturas diferenciáveis em

$\mathbb{R}^5$  (que é homeomorfo a  $(0, \infty) \times \mathbb{H}$ ) são necessariamente difeomorfas então podemos munir  $\mathcal{M}$  com a mesma estrutura diferenciável de  $(0, \infty) \times \mathbb{H}$ . Com isso, identificamos o espaço moduli  $\mathcal{M}$  com  $(0, \infty) \times \mathbb{H}$  como um espaço topológico e como uma variedade diferenciável.

**Observação 5.1.2.** *Vale ressaltar que não é uma tarefa fácil justificar a introdução em  $\mathcal{M}$  da métrica Riemanniana e orientação de  $(0, \infty) \times \mathbb{H}$ , e de fato, existem outras escolhas possíveis ([Mat89]). Como os físicos estão interessados em definir integrais de caminho nestes espaços moduli sua geometria é fundamental, resta ainda muito trabalho a ser feito (ver seção 9.5 [MM92]).*

## 5.2 Decomposição de Cartan do Espaço Moduli $\mathcal{M}$

A caracterização que obtivemos até então é simples, porém conseguimos ir além e explorar uma outra forma de ver o espaço moduli  $\mathcal{M}$ . Para chegarmos a esta outra visão de  $\mathcal{M}$ , mais no espírito da teoria geral de Donaldson, lembramos que  $(0, \infty) \times \mathbb{H}$ , com sua estrutura usual, é difeomorfo à bola de dimensão 5,  $B^5$ . Precisamos de uma parametrização dos pontos de  $\mathcal{M}$  que os identifiquem de maneira natural com os pontos de  $B^5$ . A grosso modo, queremos introduzir “coordenadas esféricas” em  $\mathcal{M}$ . Começamos assumindo um teorema não trivial de decomposição de matrizes, e consequentemente, uma decomposição chamada **decomposição de Cartan** de  $SL(2, \mathbb{H})$  (ver [Hel62]), a saber:

$$SL(2, \mathbb{H}) = Sp(2)ASp(2) \quad (5.2.1)$$

A afirmação aqui é de que qualquer elemento de  $SL(2, \mathbb{H})$  pode ser escrito como um produto  $g_1ag_2$ , onde  $g_1, g_2 \in Sp(2)$  e  $a \in A$ . A fim de usarmos este resultado propriamente precisamos desviar rapidamente do objetivo principal, como fizemos anteriormente com a primeira decomposição.

Primeiro, considere a ação à esquerda de  $SL(2, \mathbb{H})$  em  $S^7$  dada por (5.1.1). Como esta ação respeita a  $Sp(1)$ -ação natural à direita do fibrado de Hopf em  $S^7$ , a mesma descende para uma ação à esquerda de  $SL(2, \mathbb{H})$  no quociente  $S^7/Sp(1) = \mathbb{HP}^1 \cong S^4$  que é descrita da seguinte maneira:

$$g \cdot \begin{bmatrix} q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aq + b \\ cq + d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

para todo  $q \in \mathbb{H}$ . Em particular,  $Sp(2) \subseteq SL(2, \mathbb{H})$  age naturalmente sobre  $\mathbb{HP}^1$ . Mostraremos que esta ação à esquerda de  $Sp(2)$  sobre  $\mathbb{HP}^1$  é transitiva. De fato, para cada

$m \in \mathbb{H} \cup \{\infty\} (\cong S^4)$  defina  $g_m \in Sp(2)$  por

$$g_m = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+|m|^2}} \begin{pmatrix} 1 & m \\ -\bar{m} & 1 \end{pmatrix} & \text{if } m \in \mathbb{H} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{if } m = \infty \end{cases}$$

Então

$$g_m \cdot \begin{bmatrix} q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} q+m \\ -\bar{m}q+1 \end{bmatrix} & \text{if } m \in \mathbb{H} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ -q \end{bmatrix} & \text{if } m = \infty \end{cases}$$

$$g_m \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ -\bar{m} \end{bmatrix} & \text{if } m \in \mathbb{H} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} & \text{if } m = \infty \end{cases}$$

Em particular,

$$g_m \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix} & \text{if } m \in \mathbb{H} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{if } m = \infty \end{cases}$$

então cada elemento de  $\mathbb{H}\mathbb{P}^1$  está na órbita de  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  e a ação é transitiva.

Em seguida calculamos o subgrupo de isotropia de  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  em relação a essa ação à esquerda de  $Sp(2)$  em  $\mathbb{H}\mathbb{P}^1$ . Se  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , então  $g \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$  logo  $g \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  implica  $b = 0$ , assim  $g \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}$ , onde  $d \neq 0$ . Agora,  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(2)$  implica que  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  então  $|a|^2 = 1$ ,  $a\bar{c} = 0$  (logo  $c = 0$ ) e  $|d|^2 = 1$ . Portanto, o subgrupo de isotropia de  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  é

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} ; |a|^2 = |d|^2 = 1 \right\}$$

e é isomorfo a  $Sp(1) \times Sp(1)$ . Como  $Sp(2)$  é compacto, segue da Observação 2.2.2 que

$$\mathbb{HP}^1 \cong S^4 \cong Sp(2)/Sp(1) \times Sp(1) \quad (5.2.2)$$

Agora,  $Sp(2)$  é a união das classes laterais  $g(Sp(1) \times Sp(1))$ , onde  $g \in Sp(2)$ . Estas classes, entretanto, estão em correspondência biunívoca com os pontos de  $\mathbb{HP}^1$  e já vimos que cada elemento de  $\mathbb{HP}^1$  é  $g_m \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  para algum  $m \in \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ . Logo,

$$Sp(2) = \bigcup_{m \in \mathbb{H} \cup \{\infty\}} g_m(Sp(1) \times Sp(1)) \quad (5.2.3)$$

Neste momento, usaremos (5.2.1) e do fato que os elementos de  $Sp(1) \times Sp(1)$  comutam com os elementos de  $A$  para escever

$$\begin{aligned} SL(2, \mathbb{H}) &= Sp(2)ASp(2) \\ &= \bigcup_{m \in \mathbb{H} \cup \{\infty\}} g_m(Sp(1) \times Sp(1))ASp(2) \\ &= \bigcup_{m \in \mathbb{H} \cup \{\infty\}} g_m A(Sp(1) \times Sp(1))Sp(2) \\ &= \bigcup_{m \in \mathbb{H} \cup \{\infty\}} g_m ASp(2) \end{aligned}$$

Portanto

$$SL(2, \mathbb{H}) = \bigcup_{m \in \mathbb{H} \cup \{\infty\}} g_m ASp(2) \quad (5.2.4)$$

Como os elementos de  $Sp(2)$  deixam fixa a conexão natural  $\omega$  em  $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$  segue de (5.2.4) que cada ponto do espaço moduli  $\mathcal{M}$  é  $g \cdot \omega$  para algum  $g$  da forma  $g = g_m a$ , onde  $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$  e  $a \in A$ .

**Lema 5.2.1.** *Sejam  $m \in \mathbb{H}$  e  $\lambda > 0$ . Então*

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\sqrt{1+|m|^2}} \begin{pmatrix} 1 & m \\ -\bar{m} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \right)^{-1} &= (1+|m|^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda} & -m/\sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda}\bar{m} & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \\ \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \right)^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Demonstração.**

$$\frac{1}{\sqrt{1+|m|^2}} \begin{pmatrix} 1 & m \\ -\bar{m} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+|m|^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & m/\sqrt{\lambda} \\ -\bar{m}\sqrt{\lambda} & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} = \mu$$

como  $\det \mu = \frac{1}{(1+|m|^2)} + \frac{|m|^2}{(1+|m|^2)} = 1$ , então  $\mu$  possui inversa e é dada por

$$\frac{1}{\sqrt{1+|m|^2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda} & -m/\sqrt{\lambda} \\ \bar{m}\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$$

como queríamos. Uma prova inteiramente análoga para o outro caso demonstra o resultado. ■

**Lema 5.2.2.** *Seja  $g = g_m a_\lambda$ , onde  $a_\lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \in A$ . Então*

$$(s_2 \circ \varphi_2^{-1})^*(g \cdot \omega) = \text{Im} \left( \frac{(1 + \lambda^2 |m|^2) \bar{q} \, dq + (\lambda^2 - 1) \bar{m} \, dq}{|q - m|^2 + \lambda^2 |\bar{m} \, q + 1|^2} \right) \quad (5.2.5)$$

se  $m \in \mathbb{H}$  e

$$(s_2 \circ \varphi_2^{-1})^*(g \cdot \omega) = \text{Im} \left( \frac{\lambda^2 \bar{q} \, dq}{1 + \lambda^2 |q|^2} \right) \quad (5.2.6)$$

se  $m = \infty$ .

**Demonstração.** Escreva

$$\frac{1}{\sqrt{1 + |m|^2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda} & -m/\sqrt{\lambda} \\ \bar{m}\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Então segue de (5.1.6) que

$$\begin{aligned} (s_2 \circ \varphi_2^{-1})^*(g \cdot \omega) &= \text{Im} \left( \frac{\left( \frac{1}{\lambda(1+|m|^2)} + \frac{|m|^2 \lambda}{1+|m|^2} \right) \bar{q} + \frac{1}{1+|m|^2} \left( \frac{-\bar{m}}{\lambda} + \bar{m} \lambda \right)}{\frac{1}{1+|m|^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\lambda}} - \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \right|^2 + \frac{1}{1+|m|^2} |\sqrt{\lambda} \bar{m} \, q + \sqrt{\lambda}|^2} dq \right) \\ &= \text{Im} \left( \frac{\left( \frac{1}{\lambda(1+|m|^2)} + \frac{|m|^2 \lambda^2}{\lambda(1+|m|^2)} \right) \bar{q} + \frac{1}{\lambda(1+|m|^2)} (\lambda^2 - 1) \bar{m}}{\frac{1}{\lambda(1+|m|^2)} |q - m|^2 + \frac{1}{\lambda(1+|m|^2)} |\lambda^2 \bar{m} \, q + \lambda^2|^2} dq \right) \\ &= \text{Im} \left( \frac{(1 + \lambda^2 |m|^2) \bar{q} \, dq + (\lambda^2 - 1) \bar{m} \, dq}{|q - m|^2 + \lambda^2 |\bar{m} \, q + 1|^2} \right) \end{aligned}$$

para todo  $m \in \mathbb{H}$ . O mesmo fazemos para o caso em que  $m = \infty$ . ■

**Proposição 5.2.1.** *Sejam  $\lambda > 0$ ,  $m \in \mathbb{H} \cup \{\infty\}$  e*

$$g = \begin{cases} g_m a_\lambda, & \text{se } m \in \mathbb{H} \\ g_0 a_\lambda, & \text{se } m = \infty \end{cases}$$

Suponha  $n = -\bar{m}^{-1}$ ,  $\mu = 1/\lambda$  e

$$g' = \begin{cases} g_n a_\mu, & \text{se } m \in \mathbb{H} \\ g_\infty a_\mu, & \text{se } m = \infty \end{cases}$$

onde  $a_\mu = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\mu} \end{pmatrix}$ . Então,

$$(s_2 \circ \varphi_2^{-1})^*(g' \cdot \omega) = (s_2 \circ \varphi_2^{-1})^*(g \cdot \omega)$$

Consequentemente,  $g' \cdot \omega = g \cdot \omega$ .

**Demonstração.** Temos que  $|n|^2 = |- \bar{m}^{-1}|^2 = |\bar{m}^{-1}|^2 = \frac{1}{|m|^2}$ ,  $\bar{n} = -m^{-1}$  e pelo Lema 5.2.2

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\sqrt{1+|n|^2}} \begin{pmatrix} 1 & n \\ -\bar{n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\mu} \end{pmatrix} \right)^{-1} &= (1+|n|^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\mu} & -n/\sqrt{\mu} \\ \sqrt{\mu}\bar{n} & \sqrt{\mu} \end{pmatrix} \\ &= \left( 1 + \frac{1}{|m|^2} \right)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1/(1/\sqrt{\lambda}) & \bar{m}^{-1}/(1/\sqrt{\lambda}) \\ -m^{-1}/\sqrt{\lambda} & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \\ &= \left( 1 + \frac{1}{|m|^2} \right)^{-1/2} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda}\bar{m}^{-1} \\ -m^{-1}/\sqrt{\lambda} & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

então de (5.1.6) temos

$$\begin{aligned} (s_2 \circ \varphi_2^{-1})^*(g' \cdot \omega) &= \text{Im} \left( \frac{\left( \left( \frac{\lambda}{\left(1+\frac{1}{|m|^2}\right)} + \frac{|m^{-1}|^2}{\lambda\left(1+\frac{1}{|m|^2}\right)} \right) \bar{q} + \left( \frac{\lambda m^{-1}}{\left(1+\frac{1}{|m|^2}\right)} - \frac{m^{-1}}{\lambda\left(1+\frac{1}{|m|^2}\right)} \right)}{\frac{\lambda}{\left(1+\frac{1}{|m|^2}\right)} |q + \bar{m}^{-1}|^2 + \frac{1}{\lambda\left(1+\frac{1}{|m|^2}\right)} |-m^{-1}q + 1|^2} dq \right) \\ &= \text{Im} \left( \frac{\left( \left( \frac{\lambda^2}{\lambda\left(1+\frac{1}{|m|^2}\right)} + \frac{|m^{-1}|^2}{\lambda\left(1+\frac{1}{|m|^2}\right)} \right) \bar{q} + \left( \frac{\lambda^2 m^{-1}}{\lambda\left(1+\frac{1}{|m|^2}\right)} - \frac{m^{-1}}{\lambda\left(1+\frac{1}{|m|^2}\right)} \right)}{\frac{\lambda^2}{\lambda\left(1+\frac{1}{|m|^2}\right)} |q + \bar{m}^{-1}|^2 + \frac{1}{\lambda\left(1+\frac{1}{|m|^2}\right)} |-m^{-1}q + 1|^2} dq \right) \\ &= \text{Im} \left( \frac{\left( \frac{\lambda^2 |m|^2 + 1}{|m|^2} \right) \bar{q} + \frac{1}{|m|^2} (\lambda^2 - 1) \bar{m} dq}{\lambda^2 |q + \bar{m}^{-1}|^2 + |-m^{-1}q + 1|^2} \right) \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} |q + \bar{m}^{-1}|^2 &= \left( q + \frac{m}{|m|^2} \right) \left( \bar{q} + \frac{\bar{m}}{|m|^2} \right) = |q|^2 + \frac{q\bar{m}}{|m|^2} + \frac{m\bar{q}}{|m|^2} + \frac{|m|^2}{|m|^4} \\ &= |q|^2 + \frac{1}{|m|^2} 2\text{Re}(q\bar{m}) + \frac{1}{|m|^2} \\ &= \frac{1}{|m|^2} (|m|^2 |q|^2 + 2\text{Re}(q\bar{m}) + 1) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |\bar{m}q + 1|^2 &= (\bar{m}q + 1)(\bar{q}m + 1) = |m|^2 |q|^2 + 2\text{Re}(\bar{q}m) + 1 \\ &= |m|^2 |q|^2 + 2\text{Re}(q\bar{m}) + 1 \end{aligned}$$

Então  $|q + \bar{m}^{-1}|^2 = \frac{1}{|m|^2} |\bar{m}q + 1|^2$ . De maneira análoga, é fácil mostrar que  $|-m^{-1}q + 1|^2 = \frac{1}{|m|^2} |q - m|^2$ . Disso temos que

$$\begin{aligned}
(s_2 \circ \varphi_2^{-1})^*(g' \cdot \omega) &= \text{Im} \left( \frac{\left( \frac{\lambda^2 |m|^2 + 1}{|m|^2} \right) \bar{q} + \frac{1}{|m|^2} (\lambda^2 - 1) \bar{m} dq}{\lambda^2 |q + \bar{m}^{-1}|^2 + |-m^{-1} q + 1|^2} \right) \\
&= \text{Im} \left( \frac{\left( \frac{\lambda^2 |m|^2 + 1}{|m|^2} \right) \bar{q} + \frac{1}{|m|^2} (\lambda^2 - 1) \bar{m} dq}{\frac{\lambda^2}{|m|^2} |\bar{m} q + 1|^2 + \frac{1}{|m|^2} |q - n|^2} \right) \\
&= \text{Im} \left( \frac{(\lambda^2 |m|^2 + 1) \bar{q} + (\lambda^2 - 1) \bar{m} dq}{\lambda^2 |\bar{m} q + 1|^2 + |q - n|^2} \right) \\
&= (s_2 \circ \varphi_2^{-1})^*(g \cdot \omega)
\end{aligned}$$

como queríamos. Agora, escrevendo  $\mathcal{A}_{\lambda', m'} = (s_2 \circ \varphi_2^{-1})^*(g' \cdot \omega)$  e  $\mathcal{A}_{\lambda, m} = (s_2 \circ \varphi_2^{-1})^*(g \cdot \omega)$  então  $\mathcal{A}_{\lambda', m'} = \mathcal{A}_{\lambda, m}$  o que implica  $g' \cdot \omega = g \cdot \omega$ . O mesmo procedimento se aplica para mostrar o outro caso. ■

Em resumo, qualquer ponto no espaço moduli  $\mathcal{M}$  é representado por um potencial de calibre (5.2.5) e (5.2.6) e para obter um conjunto de representantes, é suficiente considerar apenas  $\lambda$ 's no intervalo  $0 < \lambda \leq 1$ . Existe ainda alguma redundância, pois  $\lambda = 1$  especifica a conexão natural  $\omega$  para *qualquer*  $m \in \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ . Para  $m = \infty$  isto fica claro por (5.2.6). No caso em que  $m \in \mathbb{H}$  e  $\lambda = 1$ , (5.2.5) reduz-se a

$$\text{Im} \left( \frac{(1 + |m|^2) \bar{q} dq}{|q - m|^2 + |\bar{m} q + 1|^2} \right)$$

Mas  $|q - m|^2 + |\bar{m} q + 1|^2 = (\bar{q} - \bar{m})(q - m) + (\bar{m} q + 1)(\bar{q} m + 1) = 1 + |m|^2 + |q|^2 + |m|^2 |q|^2 = (1 + |m|^2)(1 + |q|^2)$  então este é apenas o instanton BPST básico. Para completarmos essa caracterização geométrica, precisamos fazer o cálculo da curvatura de (5.2.5) e (5.2.6). Para isso, faremos uso do Teorema 3.2.1 e colocamos isso em um resultado

**Teorema 5.2.1.** *Sejam  $m \in \mathbb{H} \cup \{\infty\}$  e  $0 < \lambda < 1$  fixados e considere a 1-forma  $\mathcal{A}_{\lambda, m}$  em  $\mathbb{H} \cup \{\infty\} \cong S^4$  com valores em  $\text{Im}(\mathbb{H} \cup \{\infty\})$  dada por*

$$\mathcal{A}_{\lambda, m} = \text{Im} \left( \frac{(1 + \lambda^2 |m|^2) \bar{q} dq + (\lambda^2 - 1) \bar{m} dq}{|q - m|^2 + \lambda^2 |\bar{m} q + 1|^2} \right)$$

Então a intensidade de campo (curvatura)  $\mathcal{F}_{\lambda, m}$  do potencial de calibre  $\mathcal{A}_{\lambda, m}$  é

$$\mathcal{F}_{\lambda, m} = \frac{\lambda^2 |m|^2 \left( |q|^2 + |m|^2 + \lambda^2 |m|^2 |q|^2 + \lambda^2 - 1 \right) + \lambda^2 + 2|m|^2}{(|q - n|^2 + \lambda^2 |\bar{m} q + 1|^2)^2} d\bar{q} \wedge dq \quad (5.2.7)$$

**Demonstração.** Escrevendo  $\mathcal{A}_{\lambda, m} = \text{Im} \left( \frac{(1 + \lambda^2 |m|^2) \bar{q} + (\lambda^2 - 1) \bar{m}}{|q - m|^2 + \lambda^2 |\bar{m} q + 1|^2} dq \right) = \text{Im}(f(q) dq)$ , onde  $f(q) = \frac{(1 + \lambda^2 |m|^2) \bar{q} + (\lambda^2 - 1) \bar{m}}{|q - m|^2 + \lambda^2 |\bar{m} q + 1|^2}$ . Temos que

$$\begin{aligned}
f(q)dq \wedge f(q)dq &= \frac{(1 + \lambda^2|m|^2)^2}{(|q - m|^2 + \lambda^2|\bar{m} \ q + 1|^2)^2} (\bar{q}dq \wedge \bar{q}dq) \\
&+ \frac{(1 + \lambda^2|m|^2)(\lambda^2 - 1)}{(|q - m|^2 + \lambda^2|\bar{m} \ q + 1|^2)^2} (\bar{q}dq \wedge \bar{m}dq) \\
&+ \frac{(1 + \lambda^2|m|^2)(\lambda^2 - 1)}{(|q - m|^2 + \lambda^2|\bar{m} \ q + 1|^2)^2} (\bar{m}dq \wedge \bar{q}dq) \\
&+ \frac{(\lambda^2 - 1)^2}{(|q - m|^2 + \lambda^2|\bar{m} \ q + 1|^2)^2} (\bar{m}dq \wedge \bar{m}dq)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
df &= d \left( \frac{1 + \lambda^2|m|^2}{|q - m|^2 + \lambda^2|\bar{m} \ q + 1|^2} \bar{q} \right) + d \left( \frac{\lambda^2 - 1}{|q - m|^2 + \lambda^2|\bar{m} \ q + 1|^2} \bar{m} \right) \\
&= \frac{1 + \lambda^2|m|^2}{|q - m|^2 + \lambda^2|\bar{m} \ q + 1|^2} d\bar{q} + \bar{q}d \left( \frac{1 + \lambda^2|m|^2}{|q - m|^2 + \lambda^2|\bar{m} \ q + 1|^2} \right) \\
&+ \bar{m}d \left( \frac{\lambda^2 - 1}{|q - m|^2 + \lambda^2|\bar{m} \ q + 1|^2} \right)
\end{aligned}$$

Chame  $\Xi = \frac{1 + \lambda^2|m|^2}{|q - m|^2 + \lambda^2|\bar{m} \ q + 1|^2}$  e  $\Upsilon = \frac{\lambda^2 - 1}{|q - m|^2 + \lambda^2|\bar{m} \ q + 1|^2}$  então

$$df = \Xi d\bar{q} + \bar{q} d(\Xi) + \bar{m} d(\Upsilon)$$

Calculemos  $d(\Xi)$  e  $d(\Upsilon)$  como segue

$$d(\Xi) = \partial_0(\Xi)dq^0 + \partial_1(\Xi)dq^1 + \partial_2(\Xi)dq^2 + \partial_3(\Xi)dq^3$$

onde

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha(\Xi)dq^\alpha &= -\frac{(1 + \lambda^2|m|^2)}{(|q - m|^2 + \lambda^2|\bar{m} \ q + 1|^2)^2} (2(q^\alpha - m^\alpha) + 2\lambda^2(|m|^2q^\alpha + m^\alpha))dq^\alpha \\
&= -\frac{(1 + \lambda^2|m|^2)^2}{(|q - m|^2 + \lambda^2|\bar{m} \ q + 1|^2)^2} 2q^\alpha dq^\alpha \\
&\quad - \frac{(1 + \lambda^2|m|^2)(\lambda^2 - 1)}{(|q - m|^2 + \lambda^2|\bar{m} \ q + 1|^2)^2} 2m^\alpha dq^\alpha
\end{aligned}$$

Logo



$$\begin{aligned}
d(\Xi) &= \partial_0(\Xi)dq^0 + \partial_1(\Xi)dq^1 + \partial_2(\Xi)dq^2 + \partial_3(\Xi)dq^3 \\
&= -\frac{(1 + \lambda^2|m|^2)^2}{(|q - m|^2 + \lambda^2|\bar{m} \ q + 1|^2)^2}(2q^0dq^0 + 2q^1dq^1 + 2q^2dq^2 + 2q^3dq^3) \\
&\quad - \frac{(1 + \lambda^2|m|^2)(\lambda^2 - 1)}{(|q - m|^2 + \lambda^2|\bar{m} \ q + 1|^2)^2}(2m^0dq^0 + 2m^1dq^1 + 2m^2dq^2 + 2m^3dq^3) \\
&= -\frac{(1 + \lambda^2|m|^2)^2}{(|q - m|^2 + \lambda^2|\bar{m} \ q + 1|^2)^2}(q \ d\bar{q} + \overline{q \ d\bar{q}}) \\
&\quad - \frac{(1 + \lambda^2|m|^2)(\lambda^2 - 1)}{(|q - m|^2 + \lambda^2|\bar{m} \ q + 1|^2)^2}(m \ d\bar{q} + \overline{m \ d\bar{q}}) \\
&= -\frac{(1 + \lambda^2|m|^2)^2}{(|q - m|^2 + \lambda^2|\bar{m} \ q + 1|^2)^2}(q \ d\bar{q} + dq \ \bar{q}) \\
&\quad - \frac{(1 + \lambda^2|m|^2)(\lambda^2 - 1)}{(|q - m|^2 + \lambda^2|\bar{m} \ q + 1|^2)^2}(m \ d\bar{q} + dq \ \bar{m}) \\
&= -\Xi^2(q \ d\bar{q} + dq \ \bar{q}) - (\Xi \ \Upsilon)(m \ d\bar{q} + dq \ \bar{m})
\end{aligned}$$

Fazendo o mesmo para  $\Upsilon$  obtemos

$$\begin{aligned}
d(\Upsilon) &= -\frac{(1 + \lambda^2|m|^2)(\lambda^2 - 1)}{(|q - m|^2 + \lambda^2|\bar{m} \ q + 1|^2)^2}(q \ d\bar{q} + dq \ \bar{q}) \\
&\quad - \frac{(\lambda^2 - 1)^2}{(|q - m|^2 + \lambda^2|\bar{m} \ q + 1|^2)^2}(m \ d\bar{q} + dq \ \bar{m}) \\
&= -(\Xi \ \Upsilon)(q \ d\bar{q} + dq \ \bar{q}) - \Upsilon^2(m \ d\bar{q} + dq \ \bar{m})
\end{aligned}$$

Multiplicando  $d(\Xi)$  por  $\bar{q}$  e  $d(\Upsilon)$  por  $\bar{m}$  obtemos

$$\bar{q}d(\Xi) = -\Xi^2(|q|^2 \ d\bar{q} + \bar{q} \ dq \ \bar{q}) - (\Xi \ \Upsilon)(\bar{q} \ m \ d\bar{q} + \bar{q} \ dq \ \bar{m})$$

$$\bar{m}d(\Upsilon) = -(\Xi \ \Upsilon)(\bar{m} \ q \ d\bar{q} + \bar{m} \ dq \ \bar{q}) - \Upsilon^2(|m|^2 \ d\bar{q} + \bar{m} \ dq \ \bar{m})$$

Logo

$$\begin{aligned}
df &= \Xi d\bar{q} - \Xi^2(|q|^2 \ d\bar{q} + \bar{q} \ dq \ \bar{q}) - (\Xi \ \Upsilon)(\bar{q} \ m \ d\bar{q} + \bar{q} \ dq \ \bar{m}) \\
&\quad - (\Xi \ \Upsilon)(\bar{m} \ q \ d\bar{q} + \bar{m} \ dq \ \bar{q}) - \Upsilon^2(|m|^2 \ d\bar{q} + \bar{m} \ dq \ \bar{m})
\end{aligned}$$

O próximo passo é calcular o produto exterior  $df \wedge dq$ , então

$$\begin{aligned}
df \wedge dq &= \Xi d\bar{q} \wedge dq - \Xi^2(|q|^2 d\bar{q} \wedge dq + (\bar{q} dq \bar{q}) \wedge dq) \\
&\quad - (\Xi \Upsilon)((\bar{q} m d\bar{q}) \wedge dq + (\bar{q} dq \bar{m}) \wedge dq) \\
&\quad - (\Xi \Upsilon)((\bar{m} q d\bar{q}) \wedge dq + (\bar{m} dq \bar{q}) \wedge dq) \\
&\quad - \Upsilon^2(|m|^2 d\bar{q} \wedge dq + (\bar{m} dq \bar{m}) \wedge dq) \\
&= \Xi d\bar{q} \wedge dq - \Xi^2|q|^2 d\bar{q} \wedge dq + \Xi^2(\bar{q} dq) \wedge (\bar{q} dq) \\
&\quad - (\Xi \Upsilon)(\bar{q} m) d\bar{q} \wedge dq - (\Xi \Upsilon)(\bar{q} dq) \wedge (\bar{m} dq) \\
&\quad - (\Xi \Upsilon)(\bar{q} \bar{m}) d\bar{q} \wedge dq - (\Xi \Upsilon)(\bar{m} dq) \wedge (\bar{q} dq) \\
&\quad - \Upsilon^2|m|^2 d\bar{q} \wedge dq - \Upsilon^2(\bar{m} dq) \wedge (\bar{m} dq) \\
&= \Xi d\bar{q} \wedge dq - \Xi^2|q|^2 d\bar{q} \wedge dq - \Xi^2(\bar{q} dq) \wedge (\bar{q} dq) \\
&\quad - (\Xi \Upsilon)2\text{Re}(\bar{q} m) d\bar{q} \wedge dq - (\Xi \Upsilon)(\bar{q} dq) \wedge (\bar{m} dq) \\
&\quad - (\Xi \Upsilon)(\bar{m} dq) \wedge (\bar{q} dq) - \Upsilon^2|m|^2 d\bar{q} \wedge dq \\
&\quad - \Upsilon^2(\bar{m} dq) \wedge (\bar{m} dq)
\end{aligned}$$

Finalmente temos que

$$\begin{aligned}
df \wedge dq + f(q)dq \wedge f(q)dq &= \left( \Xi - \Xi^2|q|^2 - (\Xi \Upsilon)2\text{Re}(\bar{q} m) - \Upsilon^2|m|^2 \right) d\bar{q} \wedge dq \\
&= \frac{\lambda^2|m|^2 \left( |q|^2 + |m|^2 + \lambda^2|m|^2|q|^2 + \lambda^2 - 1 \right) + \lambda^2 + 2|m|^2}{(|q - n|^2 + \lambda^2|\bar{m} q + 1|^2)^2} d\bar{q} \wedge dq
\end{aligned}$$

Como

$$\frac{\lambda^2|m|^2 \left( |q|^2 + |m|^2 + \lambda^2|m|^2|q|^2 + \lambda^2 - 1 \right) + \lambda^2 + 2|m|^2}{(|q - n|^2 + \lambda^2|\bar{m} q + 1|^2)^2}$$

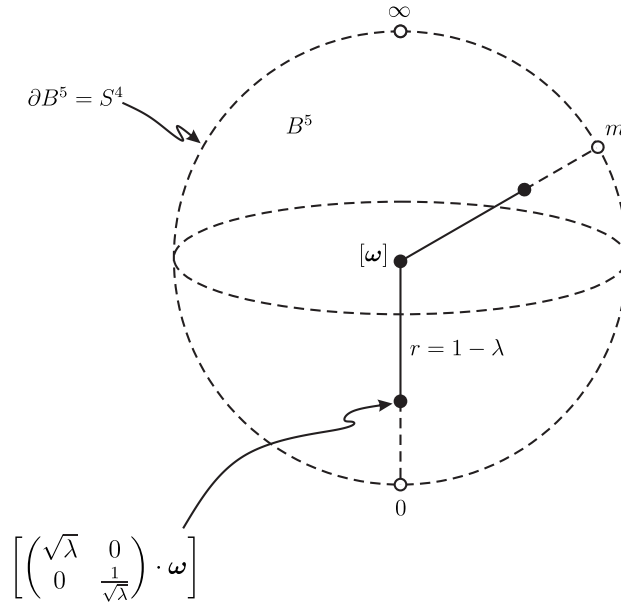
é real e  $d\bar{q} \wedge dq$  é imaginário puro tem-se pelo Teorema 3.2.1

$$\mathcal{F}_{\lambda, m} = \frac{\lambda^2|m|^2 \left( |q|^2 + |m|^2 + \lambda^2|m|^2|q|^2 + \lambda^2 - 1 \right) + \lambda^2 + 2|m|^2}{(|q - n|^2 + \lambda^2|\bar{m} q + 1|^2)^2} d\bar{q} \wedge dq$$

■

O Teorema 5.2.1 mostra que pontos distintos  $(\lambda, m)$  em  $(0, 1) \times \mathbb{H} \cup \{\infty\}$  produzem conexões de calibre não equivalentes  $(g_m \alpha_\lambda) \cdot \omega$ . Logo, todo ponto no espaço moduli  $\mathcal{M}$  exceto  $[\omega]$  é representado de maneira única por um ponto  $(\lambda, m) \in (0, 1) \times \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ . Agora,  $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$  é homeomorfo a  $S^4$  e  $(0, 1) \times S^4$  é homeomorfo à bola aberta  $B^5$  de dimensão 5 menos a origem. Logo, podemos identificar  $\mathcal{M} - \{[\omega]\}$  com  $B^5 - \{0\}$  e ver  $r = 1 - \lambda$  como a coordenada radial em  $\mathcal{M}$ . Então  $\lambda = 1$  preenche o “centro” de  $\mathcal{M}$  com  $[\omega]$  (ver Figura 5.1).

Definimos o **centro**  $c$  e a **escala**  $l$  de um instanton BPST em  $S^4 \cong \mathbb{H} \cup \{\infty\}$  de maneira análoga a que definimos em  $\mathbb{H}$ ,  $c$  é onde o máximo absoluto da densidade da ação de Yang-Mills se concentra, e a densidade da ação se encontra dentro de uma bola  $B$  de

Figura 5.1 – Esboço do espaço moduli de conexões  $\mathcal{M}$ .

Fonte: Naber, 2010, pag. 375.

raio  $l$  e centro  $c$  (em relação à de  $S^4$  induzida pela métrica Euclidiana em  $\mathbb{R}^5$ ). Note que  $l$  é igual ao comprimento de arco do círculo máximo mais curto que liga  $c$  à qualquer ponto da fronteira de  $B$  (ver Figura 5.2). Para  $p \in S^4$  denotamos por  $\tilde{p}$  o ponto antípoda de  $p$  e por  $\phi_p : S^4 \rightarrow \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$  a projeção estereográfica a partir de  $p$ .

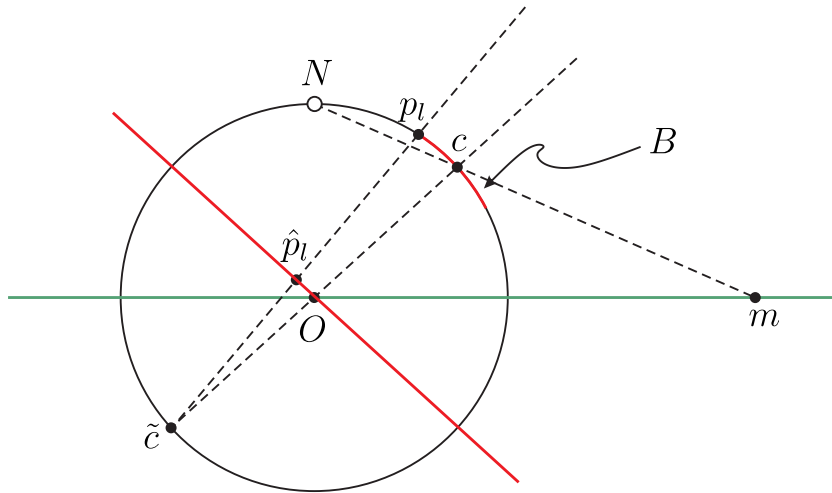


Figura 5.2 – O círculo representa a esfera  $S^4 \subseteq \mathbb{R}^5$  de centro  $O$ . O arco em vermelho corresponde à bola  $B$  mencionada no texto. As linhas em verde e vermelho representam os planos de dimensão 4 ortogonais à  $\overline{Oc}$  e  $\overline{ON}$ . O ponto  $c$  é o centro e  $l$  é a escala do instanton em  $S^4$ . O parâmetro  $m$  é igual à  $\varphi_N(c)$ , enquanto  $\lambda$  é igual ao comprimento do segmento  $\overline{Op_l}$  com  $\hat{p}_l = \phi_{\tilde{c}}(p_l)$ . Fonte: Franchetti, 2016, pag. 10

O próximo resultado mostra como  $c$ ,  $l$  e  $m$ ,  $\lambda$  estão relacionados.

**Proposição 5.2.2.** *O centro  $c$  e a escala  $l$  de um instanton em  $S^4$  estão relacionados com os parâmetros  $m$  e  $\lambda$  pelas seguintes relações*

$$m = \phi_N(c) \quad e \quad \lambda = |\phi_{\bar{c}}(p_l)| \quad (5.2.8)$$

onde  $p_l$  é qualquer ponto em  $S^4$  a uma distância  $l$  de  $c$ . Equivalentemente,

$$\lambda = \tan\left(\frac{l}{2}\right) \quad (5.2.9)$$

**Demonstração.** No caso em que  $c$  é o pólo sul  $S = (0, 0, 0, 0, -1)$  e  $2l \leq \pi \implies l \leq \frac{\pi}{2}$ , temos que  $m = 0$  e  $\lambda \leq 1$ . Agora, por (5.2.5) temos que

$$\mathcal{A}_{\lambda,m} = \text{Im} \left( \frac{\bar{q}dq}{|q|^2 + \lambda^2} \right)$$

Neste caso  $m$  e  $\lambda$  coincidem com o centro e escala de um instanton em  $\mathbb{H}$ . Como a projeção estereográfica é uma transformação conforme (ver (2.1.32)) e a densidade da ação de Yang-Mills  $\text{tr } \mathcal{F} \wedge * \mathcal{F}$  é conformemente invariante pois depende do operador estrela de Hodge (ver (C.2.1) e Observação 4.1.1), a propriedade (5.2.8) de  $c$  e  $l$  seguem de suas projeções estereográficas. O resultado se generaliza para quaisquer valores de  $c$  e  $l$  pois a ação é invariante por  $Sp(2)$  (Proposição 5.1.1). A equação (5.2.9) é imediata da Figura 5.2. ■

Um aspecto elegante da Figura 5.2 é que o espaço base  $S^4$  do fibrado de Hopf em questão aparece naturalmente como um bordo do espaço moduli  $\mathcal{M}$  numa certa “compactificação” de  $\mathcal{M}$ , a saber, o disco fechado  $D^5$ . Além disso, estes pontos do bordo possuem uma interpretação física relativamente simples. Vimos que as intensidades de campo correspondentes a qualquer conexão da classe  $\left[ \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \cdot \omega \right]$  tornam-se cada vez mais concentrados em torno 0 na medida que  $\lambda \rightarrow 0$ , ou seja, na medida que  $r \rightarrow 1$  e aproximase do bordo do espaço moduli ao longo do raio de  $D^5$  contendo 0 (o pólo sul). Este ponto no bordo pode ser intuitivamente identificado com uma conexão (ou campo de calibre) concentrado inteiramente no ponto 0.

## 6 Conclusão

O espaço moduli  $\mathcal{M}$  das conexões anti-auto-duais do fibrado de Hopf  $SU(2) \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$  é um objeto um tanto abstrato a princípio, entretanto apresentamos neste trabalho uma figura relativamente simples deste espaço. Identificamos  $\mathcal{M}$  com a bola aberta unitária  $B^5$  em  $\mathbb{R}^5$ . A classe de equivalência  $[\omega]$  da conexão natural fica situada no centro. Movendo radialmente de dentro para fora a partir de  $[\omega]$  encontra-se classes de equivalências de conexões com intensidades de campos que se concentram cada vez mais na vizinhança de um único ponto em  $S^4$  (Figura 4.1). Adjuntando estes pontos no final dos segmentos radiais nos dá o disco fechado  $D^5$  de dimensão 5 o qual enxergamos como uma compactificação do espaço moduli no qual a fronteira é uma cópia do espaço base  $S^4$ . Simon Donaldson generaliza esta figura para provar um teorema (Apêndice D) acerca de variedades diferenciáveis de dimensão 4. Os detalhes vão além do escopo deste trabalho e para estudos posteriores indicamos [FU84] e [Law85].

# APÊNDICE A – Números Quatérnios

Assim como em  $\mathbb{R}^2$ , o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^4$  admite uma estrutura multiplicativa que permite esclarecer as topologias de  $S^3$  e  $S^4$ .

Introduzimos, inicialmente, esta estrutura multiplicativa em  $\mathbb{R}^4$  de uma maneira natural. Consideremos o conjunto de matrizes complexas  $2 \times 2$

$$\mathcal{R}^4 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

Temos que  $\mathcal{R}^4$  é fechado em relação à adição de matrizes e multiplicação por escalar *real*, portanto é visto como espaço vetorial real. Escrevendo  $\alpha = y^0 + y^1 i$  e  $\beta = y^2 + y^3 i$  temos que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y^0 + y^1 i & y^2 + y^3 i \\ -y^2 + y^3 i & y^0 - y^1 i \end{pmatrix} \\ &= y^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y^1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + y^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + y^3 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

logo as quatro matrizes indicadas na última igualdade geram  $\mathcal{R}^4$ . Como a última soma é  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  se, e somente se,  $y^0 = y^1 = y^2 = y^3 = 0$ , então essas matrizes formam uma base de  $\mathcal{R}^4$ . Em particular,  $\dim \mathcal{R}^4 = 4$ . Introduzimos a seguinte notação

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

A base  $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  de  $\mathcal{R}^4$  determina um **isomorfismo natural** de  $\mathcal{R}^4$  em  $\mathbb{R}^4$  dado por  $y^0 \mathbf{1} + y^1 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + y^3 \mathbf{k} \mapsto (y^0, y^1, y^2, y^3)$ . Definimos um produto interno em  $\mathcal{R}^4$  afirmando que a base  $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  é ortonormal, então a norma de  $y = y^0 \mathbf{1} + y^1 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + y^3 \mathbf{k}$  é dada por  $\|y\|^2 = (y^0)^2 + (y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2$ , assim o isomorfismo natural é, na verdade, uma isometria. Note que  $\|y\|^2$  é o determinante da matriz  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ . Assim,  $\mathcal{R}^4$  é, na verdade,  $\mathbb{R}^4$ . De fato, munimos  $\mathcal{R}^4$  com uma topologia que faz com que o isomorfismo natural torne-se um homeomorfismo, definindo que um subconjunto  $U$  de  $\mathcal{R}^4$  é aberto em  $\mathcal{R}^4$  se, e somente se, sua imagem pelo isomorfismo natural é aberto em  $\mathbb{R}^4$ .

Além disso, temos que  $\mathcal{R}^4$  é fechado também em relação à multiplicação por matrizes pois

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\bar{\delta} & \bar{\gamma} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha\gamma - \beta\bar{\delta} & \alpha\delta + \beta\bar{\gamma} \\ -(\bar{\alpha}\bar{\delta} + \bar{\beta}\gamma) & \bar{\alpha}\bar{\gamma} - \bar{\beta}\delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha\gamma - \beta\bar{\delta} & \alpha\delta + \beta\bar{\gamma} \\ -(\overline{\alpha\delta + \beta\bar{\gamma}}) & \overline{\alpha\gamma - \beta\bar{\delta}} \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^4 \end{aligned}$$

E mais ainda,  $\mathcal{R}^4$  contém o inverso multiplicativo de cada elemento não nulo pois

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^4 \quad (\text{A.0.1})$$

Logo  $\mathcal{R}^4$  forma um grupo não-Abeliano em relação à multiplicação de matrizes. Sob essas condições, é fácil verificar que

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 &= -1 \\ \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} &= -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \end{aligned} \quad (\text{A.0.2})$$

e  $\mathbf{1}$  é a identidade multiplicativa. Essas relações determinam completamente a multiplicação em  $\mathcal{R}^4$ .

Construímos dessa maneira uma representação concreta da **álgebra dos quatérnios**  $\mathbb{H}$ , definido mais comumente de maneira abstrata como um espaço vetorial real 4-dimensional no qual é definida uma multiplicação  $(x, y) \mapsto xy$  satisfazendo as seguintes leis de associatividade e distributividade para todo  $x, y, z \in \mathbb{H}$  e todo  $a \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} (xy)z &= x(yz) \\ x(y+z) &= xy + xz \\ (x+y)z &= xz + yz \\ a(xy) &= (ax)y = x(ay) \end{aligned}$$

no qual existe uma base canônica  $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  satisfazendo (2) e  $\mathbf{1}x = x\mathbf{1} = x$  para todo  $x \in \mathbb{H}$ . Desse modo  $\mathbb{H}$  pode ser visto da maneira abstrata apresentada acima, ou como o conjunto  $\mathcal{R}^4$ , ou ainda, como o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido da estrutura multiplicativa (A.0.3) e aplicando o isomorfismo natural.

Apresentamos, agora, algumas propriedades algébricas das quais faremos uso constante. Primeiro como  $\mathbf{1}$  é a identidade multiplicativa podemos escrever um quatérnio, sem perda de generalidade, como  $x = x^0 + x^1\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}$ . A **parte real** de  $x$  é  $\text{Re}(x) = x^0$  e a **parte imaginária** é  $\text{Im}(x) = x^1\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}$ . Quatérnios cuja parte imaginária é zero são chamados **quatérnios reais** e o conjunto de todos estes é isomorfo a  $\mathbb{R}$ .  $\text{Im}\mathbb{H} = \{x^1\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}; x^1, x^2, x^3 \in \mathbb{R}\}$  é o conjunto dos **quatérnios imaginários puros**. O **conjugado** de  $x$  é o quatérnio  $\bar{x} = x^0 - x^1\mathbf{i} - x^2\mathbf{j} - x^3\mathbf{k}$  (caso  $x$  seja visto

como matriz em  $\mathcal{R}^4$ ,  $\bar{x}$  é matriz *conjugada transposta* de  $x$ ). O produto de dois quatérnio  $x = x^0 + x^1\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}$  e  $y = y^0 + y^1\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + y^3\mathbf{k}$  é dado por

$$\begin{aligned} xy = & [x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3] + \\ & [x^0y^1 + x^1y^0 + x^2y^3 - x^3y^2]\mathbf{i} + \\ & [x^0y^2 + x^2y^0 + x^3y^1 - x^1y^3]\mathbf{j} + \\ & [x^0y^3 + x^3y^0 + x^1y^2 - x^2y^1]\mathbf{k} \end{aligned} \quad (\text{A.0.3})$$

Em particular vemos que  $x\bar{x} = \bar{x}x = (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ . Definindo o **módulo** do quatérnio  $x$  como sendo  $|x| = ((x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)^{1/2}$  temos que  $x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$ .

A seguir registramos algumas propriedades que foram usadas no texto. Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{H}$  e  $a, b \in \mathbb{R}$  valem:

1.  $\overline{ax + by} = a\bar{x} + b\bar{y}$ ;
2.  $\overline{(\bar{x})} = x$ ;
3.  $|\bar{x}| = |x|$ ;
4.  $|ax| = |a||x|$ ;
5.  $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$ ;
6.  $|xy| = |x||y|$ ;
7.  $2\text{Re}(x\bar{y}) = 2\text{Re}(y\bar{x})$ ;
8.  $\text{Im}(x\bar{y}) = -\text{Im}(y\bar{x})$ .

No caso em que  $x, y \in \text{Im}\mathbb{H}$  tem-se que:

- (a) se  $x, y \in \text{Im}\mathbb{H}$  então  $\overline{xy} = yx$
- (b)  $x, y \in \text{Im}\mathbb{H}$  então  $xy - yx = 2\text{Im}(xy)$

Se  $y \in \mathbb{H} - \{0\}$  então

$$y \left( \frac{\bar{y}}{|y|^2} \right) = \frac{y\bar{y}}{|y|^2} = \frac{|y|^2}{|y|^2} = 1$$

da mesma forma  $\left( \frac{\bar{y}}{|y|^2} \right) y = 1$ . Logo todo elemento não nulo de  $\mathbb{H}$  possui um **inverso** multiplicativo definido por

$$y^{-1} = \frac{\bar{y}}{|y|^2} \quad (\text{A.0.4})$$

com isso  $(\mathbb{H} - \{0\}, \cdot)$  forma um grupo. O subconjunto de  $\mathbb{H}$  que contém todos os elementos da forma  $x^0 + x^1\mathbf{i}$  é um subespaço linear de  $\mathbb{H}$  também fechado para operação de multiplicação e inversão, ou seja, é uma subálgebra de  $\mathbb{H}$ . Além disso,  $\mathbf{i}^2 = -1$ , e portanto é naturalmente isomorfa à álgebra usual dos números complexos  $\mathbb{C}$ . Quando  $x \in \mathbb{H}$  e  $|x| = 1$  chamamos  $x$  um **quatérnio unitário** e o conjunto de todos estes elementos é fechado em relação à multiplicação (Propriedade # 6 acima) e a inversão ( $|x| = 1$  implica  $|x^{-1}| = \left| \frac{\bar{x}}{|x|^2} \right| = |\bar{x}| = |x| = 1$ , por (A.0.4) e pela propriedade # 3 acima, logo forma



um subgrupo dos quatérnios não nulos. Mostremos em  $\mathcal{R}^4$  este **grupo de quatérnios unitários**. Como comentamos anteriormente o módulo de um quatérnio é o determinante da matriz em  $\mathcal{R}^4$ , logo todos elementos possuem determinante 1. Por (A.0.1) qualquer  $A \in \mathcal{R}^4$  com determinante 1 possui um inverso  $A^{-1}$  igual a transposta do conjugado  $\bar{A}^T$ , ou seja, unitário. Denotamos por  $SU(2)$  o conjunto de todas as matrizes complexas unitárias  $2 \times 2$  com determinante igual a 1, este grupo é chamado **grupo especial unitário de ordem 2**.

**Lema A.0.1.**  $SU(2) \subseteq \mathcal{R}^4$ .

**Demonstração.** Seja  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SU(2)$ . Temos que  $\det A = 1$  então  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$  enquanto  $A\bar{A}^T = \mathbf{I}_n$  diz que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} & \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} \\ \bar{\alpha}\gamma + \bar{\beta}\delta & \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta} \end{pmatrix}$$

Logo

$$\begin{aligned} \alpha\bar{\gamma} &= -\beta\bar{\delta} \implies \alpha(\bar{\gamma}\gamma) = (-\beta\gamma)\bar{\delta} \\ &\implies \alpha(1 - \delta\bar{\delta}) = (1 - \alpha\delta)\bar{\delta} \\ &\implies \alpha - \alpha\delta\bar{\delta} = \bar{\delta} - \alpha\delta\bar{\delta} \\ &\implies \alpha = \bar{\delta} \implies \delta = \bar{\alpha} \end{aligned}$$

quanto a  $\gamma$  temos que

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}\gamma &= -\bar{\beta}\delta \implies (\alpha\bar{\alpha})\gamma = -\bar{\beta}(\alpha\delta) \\ &\implies (1 - \bar{\beta}\beta)\gamma = -\bar{\beta}(1 + \beta\gamma) \\ &\implies \gamma - \bar{\beta}\beta\gamma = -\bar{\beta} - \bar{\beta}\beta\gamma \\ &\implies \gamma = -\bar{\beta} \end{aligned}$$

Isto mostra que  $A \in \mathcal{R}^4$ . ■

Vimos então que os quatérnios unitários em  $\mathcal{R}^4$  estão todos em  $SU(2)$ . O Lema A.0.1 implica que qualquer elemento de  $SU(2)$  é um quatérnio unitário, pois está em  $\mathcal{R}^4$  e possui determinante 1. Assim, o grupo dos quatérnios unitários em  $\mathcal{R}^4$  é exatamente  $SU(2)$ . Com isso, enunciamos o seguinte teorema caracterizando o subespaço  $SU(2)$ .

**Teorema A.0.1.** *A esfera  $S^3$  é homeomorfa ao subespaço  $SU(2)$  de  $\mathcal{R}^4$ .*

**Demonstração.** O homeomorfismo natural de  $\mathbb{R}^4$  sobre  $\mathcal{R}^4$  leva  $S^3$  em um subespaço de  $\mathcal{R}^4$  homeomorfo a  $S^3$ . Como o homeomorfismo preserva distâncias, e consequentemente a norma de qualquer vetor em  $\mathbb{R}^4$ , então esta imagem consiste precisamente nos quatérnios unitários e nós acabamos de mostrar que o grupo dos quatérnios unitários em  $\mathcal{R}^4$  é  $SU(2)$ . ■

# APÊNDICE B – Mais sobre Física Quântica e Campo de Matéria

## B.1 Motivação Física

Em física o espaço base para os fibrados estudados é “espaço-tempo”. Ignorando efeitos gravitacionais isto significa “espaço-tempo de Minkowski”, onde cada evento no histórico de um nêutron (worldline) é representado por quatro números  $(x, y, z, t)$  especificando seu lugar no espaço  $(x, y, z)$  e o tempo  $t$  no qual ocupa este lugar. Como variedade diferenciável isto é apenas  $\mathbb{R}^4$ , entretanto o espaço de Minkowski não pode ser identificado inteiramente com  $\mathbb{R}^4$ , pois a relação entre eventos físicos são expressos em termos de um certo produto interno  $(x^1x^2 + y^1y^2 + z^1z^2 - t^1t^2)$  ao invés do produto interno usual de  $\mathbb{R}^4$ . Esta diferença é importante uma vez que nossa discussão da seção 2 do capítulo 4 sobre os campos de Yang-Mills dependem do Hodge dual e estes, por sua vez, foi definido em termos da estrutura Riemanniana de  $\mathbb{R}^4$ . Infelizmente, sabe-se muito pouco acerca de campos de Yang-mills em espaço de Minkowski, e mais, os objetos de interesse da teoria de física quântica (caminhos integrais de Feynman) são extremamente difíceis de fazerem qualquer sentido neste contexto. O sinal de menos no produto interno de Minkowski causa problemas. Os físicos para contornarem esse problema mudam o sinal introduzindo a coordenada  $\tau = it$  chamada **rotação de Wick** e transforma o espaço de Minkowski em  $\mathbb{R}^4$  através

$$(x^1x^2 + y^1y^2 + z^1z^2 - t^1t^2) = (x^1x^2 + y^1y^2 + z^1z^2 + \tau^1\tau^2)$$

O problema é saber se esta mudança preserva ou não os conceitos físicos, para maiores detalhes indicamos [Gui91]. Sob o ponto de vista matemático, esta mudança permite a existência de conexões anti-auto-duais e a compreensão do espaço moduli que nos permite encontrar várias propriedades topológicas. Com isso, vemos que vale a pena trabalhar com campos de Yang-Mills sobre  $\mathbb{R}^4$  e os campos cuja ação é finita são particularmente desejáveis e a discussão feita no capítulo 4 nos leva a focar nas conexões sobre os  $Sp(1)$ -fibrados sobre  $S^4$ .

O que mostramos neste trabalho é como é feita a modelagem matemática desses campos através de conexões em fibrados principais. Mas precisamos esclarecer como as partículas carregadas e núcleons aparecem neste estudo.

Consideramos, novamente, a figura clássica de uma partícula carregada movendo-se através de uma região no espaço permeada com um campo eletromagnético. A carga é descrita por suas funções de onde  $\psi$  (uma função de valores complexos de  $x, y, z$  e  $t$ )

obtidas como soluções da equação de Schrödinger. O campo no qual a partícula se movimenta entra na equação de Schrödinger através de suas funções escalares e vetoriais de potencial. Se estas existem numa região  $X$  de interesse, então resolve-se a equação diferencial e inicia-se o processo de descobrir o que a solução  $\psi : X \rightarrow \mathbb{C}$  significa fisicamente. Na situação da partícula com spin isotópico associada com um campo de Yang-Mills, as funções de onda possuem duas componentes complexas  $\begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}$  de modo que as fibras são cópias de  $\mathbb{C}^2$  e o efeito de uma transformação é representada por uma ação de  $SU(2)$  sobre  $\mathbb{C}^2$  (equivalentemente, pode-se considerar a função de onda com valores em  $\mathbb{H}$  e a ação sendo a de  $Sp(1)$ ). Buscamos então o seguinte modelo: Uma partícula possui uma estrutura de estado interno, os estados de cada são representados como elementos de algum grupo de Lie. A função de onda da partícula assume valores em algum espaço vetorial  $\mathcal{V}$ . As partículas sofrem os efeitos de um campo de calibre representado por uma conexão de um  $G$ -fibrado principal. A conexão descreve (pelo Teorema 2.4.1) a evolução do estado interno da partícula. A resposta da função de onda em cada ponto a uma transformação decalibre será dada pela ação à esquerda (representação) de  $G$  sobre  $\mathcal{V}$ .  $\mathcal{V}$  e esta ação à esquerda de  $G$  sobre  $\mathcal{V}$  determinam um “fibrado vetorial associado” obtido substituindo as  $G$ -fibras do fibrado principal por cópias de  $\mathcal{V}$ . As seções transversais deste fibrado representam as funções de onda locais da partícula que sofre os efeitos do campo de calibre. Finalmente, surge a partir da conexão no fibrado principal que representa o campo de calibre um processo de diferenciação invariante para estas funções de onda. Em termos da derivada é possível postular equações diferenciais (equações de campo) que descrevem a resposta quantitativa da partícula ao campo de calibre.

Na próxima seção formalizaremos esta construção matematicamente.

## B.2 Fibrados Associados e Campos de Matéria

As provas das afirmações nesta seção encontram-se nas duas últimas seções do Capítulo 6 de [Nab10] e não serão feitas aqui.

Seja  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  um  $G$ -fibrado principal suave sobre  $X$  com ação à direita  $\sigma : P \times G \rightarrow P$ ,  $\sigma(p, g) = p \cdot g$ . Seja  $F$  uma variedade diferenciável sobre a qual  $G$  age suavemente pela esquerda (a imagem de  $(g, \xi) \in G \times F$  por esta ação é  $g \cdot \xi$ ). Então  $((p, \xi), g) \mapsto (p, \xi) \cdot g = (p \cdot g, g^{-1} \cdot \xi)$  é uma ação à direita de  $G$  sobre  $P \times F$ . Denotamos por  $P \times_G F$  a órbita de  $P \times F$  por esta ação. Mais precisamente, definimos uma relação de equivalência  $\sim$  em  $P \times F$  da seguinte forma:  $(p_1, \xi_1) \sim (p_2, \xi_2)$  se, e somente se, existe um  $g \in G$  tal que  $(p_2, \xi_2) = (p_1, \xi_1) \cdot g$ . A classe de equivalência contendo  $(p, \xi)$  é  $[p, \xi] = \{(p \cdot g, g^{-1} \cdot \xi); g \in G\}$ . Como conjunto  $P \times_G F = \{[p, \xi], (p, \xi) \in P \times F\}$  e munimos  $P \times_G F$  com a topologia quociente determinada por  $\mathcal{Q} : P \times F \rightarrow P \times_G F$ ,  $\mathcal{Q}(p, \xi) = [p, \xi]$ . Definimos também  $\mathcal{P}_G : P \times_G F \rightarrow X$  por  $\mathcal{P}_G([p, \xi]) = \mathcal{P}(p)$ . Então  $\mathcal{P}_G$  é contínua e,

para todo  $x \in X$ ,  $\mathcal{P}_G^{-1}(x) = \{[p, \xi]; \xi \in F\}$ , onde  $p$  é qualquer ponto em  $\mathcal{P}^{-1}(x)$ . Se  $(V, \Psi)$  é qualquer trivialização local de  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  e  $s : V \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V)$  é a seção transversal associada, então a aplicação  $\tilde{\Phi} : V \times F \rightarrow \mathcal{P}_G^{-1}(V)$  definida por  $\tilde{\Phi}(x, \xi) = [s(x), \xi]$  é um homeomorfismo cuja inversa é dada por  $\tilde{\Psi} : \mathcal{P}_G^{-1}(V) \rightarrow V \times F$ ,  $\tilde{\Psi}([s(x), \xi]) = (x, \xi)$ . Se  $(V_i, \Psi_i)$  e  $(V_j, \Psi_j)$  são duas trivializações com  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$  e  $g_{ji} : V_i \cap V_j \rightarrow G$  é a função de transição correspondente, então  $\tilde{\Psi}_j \circ \tilde{\Psi}_i^{-1} : (V_i \cap V_j) \times F \rightarrow (V_i \cap V_j) \times F$  é dada por  $\tilde{\Psi}_j \circ \tilde{\Psi}_i^{-1}(x, \xi) = (x, g_{ji}(x) \cdot \xi)$  e portanto é um difeomorfismo. Segue que existe uma única estrutura diferenciável em  $P \times_G F$  onde cada  $\tilde{\Psi} : \mathcal{P}_G^{-1}(V) \rightarrow V \times F$  é um difeomorfismo e que, em relação a esta estrutura,  $\mathcal{P}_G : P \times_G F \rightarrow X$  é diferenciável. Chamamos

$$\mathcal{P}_G : P \times_G F \rightarrow X \quad (\text{B.2.1})$$

o **fibrado associado a  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$** .

O caso especial de maior interesse aparece da seguinte forma: Seja  $F = \mathcal{V}$  um espaço vetorial de dimensão finita e  $\rho : G \rightarrow GL(\mathcal{V})$  uma representação suave. Então de  $\rho$  surge uma ação suave à esquerda de  $G$  sobre  $\mathcal{V}$  ( $(g, v) \mapsto g \cdot v = (\rho(g))(v)$ ). O fibrado associado com  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  por esta ação é denotado por

$$\mathcal{P}_\rho : P \times_\rho \mathcal{V} \rightarrow X \quad (\text{B.2.2})$$

e é chamado **fibrado vetorial associado com  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$**  pela representação  $\rho$ . Neste caso, cada fibra  $\mathcal{P}_\rho^{-1}(x) = \{[p, v]; v \in \mathcal{V}\}$ , onde  $p$  é um ponto qualquer de  $\mathcal{P}^{-1}(x)$ , é uma cópia de  $\mathcal{V}$  e admite uma estrutura natural de espaço vetorial:

$$a_1[p, v_1] + a_2[p, v_2] = [p, a_1v_1 + a_2v_2]$$

para todos  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  e  $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ . Registramos alguns exemplos.

1. Seja  $U(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  um  $U(1)$ -fibrado principal arbitrário e  $\mathcal{V} = \mathbb{C}$  (como um espaço vetorial real bidimensional). Se  $\rho : U(1) \rightarrow GL(\mathbb{C})$  é uma representação qualquer, então o fibrado vetorial associado  $\mathcal{P}_\rho : P \times_\rho \mathbb{C} \rightarrow X$  possui fibras que são cópias de  $\mathbb{C}$  e é chamado de **fibrado em retas complexas** sobre  $X$ . Uma escolha para  $\rho : U(1) \rightarrow GL(\mathbb{C})$  é obtida tomando  $(\rho(g))(z) = gz$  para cada  $g \in U(1)$  e  $z \in \mathbb{C}$  (se  $g = e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , então  $\rho(g)$  é uma rotação por  $\theta$ ). Mais geralmente, pode-se definir, para cada inteiro  $n$ , uma representação  $\rho : G \rightarrow GL(\mathbb{C})$  por  $(\rho(g))(z) = g^n z$  e portanto um fibrado vetorial associado sobre  $X$ .

2. Seja  $Sp(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  um  $Sp(1)$ -fibrado principal arbitrário e  $\mathcal{V} = \mathbb{H}$  (como um espaço vetorial real quadridimensional). Se  $\rho : Sp(1) \rightarrow GL(\mathbb{H})$  é uma representação qualquer, então o fibrado vetorial associado  $\mathcal{P}_\rho : P \times_\rho \mathbb{H} \rightarrow X$  possui fibras que são cópias de  $\mathbb{H}$  e é chamado de **fibrado em retas complexas** sobre  $X$ . Por exemplo,  $\rho : Sp(1) \rightarrow GL(\mathbb{H})$  é obtida tomando  $(\rho(g))(q) = gq$  ou  $(\rho(g))(q) = g^n q$  e portanto um fibrado vetorial associado sobre  $X$ .

3. Sejam  $G$  um grupo de Lie de matrizes qualquer e  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  um  $G$ -fibrado principal arbitrário. A representação adjunta  $ad : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$  associa cada  $g \in G$  à transformação não singular  $ad_g$  na álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  definida por

$$ad_g(A) = gAg^{-1} \quad (\text{B.2.3})$$

O fibrado vetorial associado com  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  por  $ad$  é chamado **fibrado adjunto** de  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  e denotado por

$$ad P = P \times_{ad} \mathfrak{g} \quad (\text{B.2.4})$$

As fibras de  $d P$  são cópias da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ .

Agora, seja  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  um  $G$ -fibrado principal arbitrário,  $F$  uma variedade diferenciável qualquer sobre o qual  $G$  age e  $\mathcal{P}_G : P \times_G F \rightarrow X$  o fibrado associado. Se  $V$  é um subconjunto aberto em  $X$ , então uma aplicação suave  $\phi : \mathcal{P}^{-1}(V) \rightarrow F$  é dita ser **equivariante** se

$$\phi(p \cdot g) = g^{-1} \cdot \phi(p) \quad (\text{B.2.5})$$

para todo  $p \in \mathcal{P}^{-1}(V)$  e  $g \in G$ . Dado uma aplicação desta defini-se  $s_\phi : V \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V)$  por

$$s_\phi(x) = [p, \phi(p)] \quad (\text{B.2.6})$$

onde  $p$  é qualquer ponto de  $\mathcal{P}^{-1}(x)$ . Então  $s_\phi$  é suave e satisfaz  $\mathcal{P} \circ s_\phi = id_V$ . Reciprocamente, considere  $s : V \rightarrow \mathcal{P}_G^{-1}(V)$  uma aplicação suave tal que  $\mathcal{P}_G \circ s = id_V$  (chamada **seção transversal** do fibrado  $\mathcal{P}_G : P \times_G F \rightarrow X$ ). Defina  $\phi_s : \mathcal{P}^{-1}(V) \rightarrow F$  da seguinte forma: Seja  $p \in \mathcal{P}^{-1}(V)$ . Então  $\mathcal{P}(p) = x$  está em  $V$  logo  $s(x) \in \mathcal{P}_G^{-1}(V)$  e existe um único elemento  $\phi_s(p) \in F$  tal que

$$s(x) = [p, \phi_s(p)] \quad (\text{B.2.7})$$

Então  $\phi_s$  é uma aplicação suave equivariante. Além disso, esta correspondência entre aplicações equivariantes  $\phi : \mathcal{P}^{-1}(V) \rightarrow F$  e seções transversais  $s : V \rightarrow \mathcal{P}_G^{-1}(V)$  do fibrado associado é biunívoca. Isto é aplicado, em particular, para o caso especial de um fibrado vetorial  $\mathcal{P}_\rho : P \times_\rho \mathcal{V} \rightarrow X$  associado a  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  por alguma representação  $\rho : G \rightarrow GL(\mathcal{V})$ .

Sejam  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  um  $G$ -fibrado principal,  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial e  $\rho : G \rightarrow GL(\mathcal{V})$  uma representação. Uma aplicação equivariante com valores em  $\mathcal{V}$   $\phi : P \rightarrow \mathcal{V}$  em  $P$  é chamada **campo de matéria (de tipo  $\rho$ )** em  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$ . Se  $\mathcal{V} = \mathbb{C}$ , então  $\phi$  é chamada de **campo escalar complexo**. Se  $\mathcal{V} = \mathbb{C}^2$ ,  $\phi$  é chamada de uma **função de onda de duas componentes**. Se  $\mathcal{V} = \mathfrak{g}$  e  $\rho = ad$  é a representação adjunta, então  $\phi$  é chamada de **campo de Higgs**.

Em particular, um campo de matéria  $\phi$  é uma 0-forma em  $P$  e portanto possui derivada exterior  $d\phi$ . Assumindo agora que  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  possui definida uma forma de conexão  $\omega$ , definimos a **derivada exterior covariante**  $d^\omega\phi$  de  $\phi$  fazendo  $d\phi$  agir somente nas partes horizontais: Para cada  $p \in P$  e  $\mathbf{v} \in T_p(P)$ ,

$$(d^\omega\phi)_p(\mathbf{v}) = (d\phi)_p(\mathbf{v}^H) \quad (\text{B.2.8})$$

Esta é uma 1-forma em  $P$  e satisfaz

$$\sigma^*(d^\omega\phi) = g^{-1} \cdot d^\omega\phi \quad (\text{B.2.9})$$

para cada  $g \in G$ . Estas são as derivadas que aparecem nas equações de campo que descrevem a resposta quantitativa de uma partícula ao campo de calibre. Uma fórmula computacional análoga à Equação Estrutural de Cartan para curvatura  $\Omega$  (que a derivada exterior covariante de  $\omega$ ) é obtida da seguinte maneira: Para qualquer  $A \in \mathfrak{g}$  e  $v \in \mathcal{V}$  definimos  $A \cdot v \in \mathcal{V}$  por

$$A \cdot v = \left. \frac{d}{dt}(\exp(tA) \cdot v) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\rho(\exp(tA))(v)) \right|_{t=0} \quad (\text{B.2.10})$$

**Observação B.2.1.** *Ressaltamos dois casos especiais imediatamente. Se  $G$  é um grupo de matrizes  $n \times n$  (com entradas em  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ ),  $\mathcal{V} = \mathbb{F}^n$  e  $\rho$  é a representação natural de  $G$  em  $\mathcal{V}$  (multiplicação de matrizes), então, identificando  $\mathfrak{g}$  com uma álgebra de matrizes,  $A \cdot v = Av$  (multiplicação de matrizes). Por outro lado, se  $\mathcal{V} = \mathfrak{g}$  e  $\rho = \text{ad}$ , então, para todos  $A, B \in \mathfrak{g}$ ,  $A \cdot B = [A, B]$ .*

Agora, se  $\phi$  é uma 0-forma em  $P$  com valores em  $\mathcal{V}$  e  $\omega$  uma 1-forma em  $P$  com valores em  $\mathfrak{g}$  podemos definir uma 1-forma em  $P$  por

$$(\omega \cdot \phi)_p(\mathbf{v}) = \omega_p \cdot \phi(p) \quad (\text{B.2.11})$$

para cada  $p \in P$  e  $\mathbf{v} \in T_p(P)$ . Então

$$d^\omega\phi = d\phi + \omega \cdot \phi \quad (\text{B.2.12})$$

Concluimos esta seção dando dois exemplos concretos em coordenadas locais que complementam a discussão feita na seção anterior.

1. Seja  $U(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  um fibrado principal com conexão  $\omega$  e seja  $\mathcal{V} = \mathbb{C}$  (visto como espaço vetorial real). Para cada inteiro  $q$  defina  $\rho_q : U(1) \rightarrow GL(\mathbb{C})$  como sendo a representação  $\rho_q(g)(z) = g^q z$ . Denotamos  $\phi = \phi(x^1, \dots, x^n)$  as coordenadas locais do pullback por alguma seção transversal de um campo de matéria. Analogamente, o potencial de calibre será escrito localmente como

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(x^1, \dots, x^n) = \mathcal{A}_\alpha(x^1, \dots, x^n) dx^\alpha = -iA_\alpha(x^1, \dots, x^n) dx^\alpha$$

A expressão em coordenadas locais correspondente para o pullback de  $d^\omega \phi$  é dado por

$$(\partial_\alpha \phi + q\mathcal{A}_\alpha \phi)dx^\alpha = (\partial_\alpha - \mathbf{i}qA_\alpha)dx^\alpha \quad (\text{B.2.13})$$

onde  $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ .

2. Seja  $SU(2) \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  um fibrado principal com conexão  $\omega$  e considere  $\mathcal{V} = \mathbb{C}^2$ . Para cada inteiro  $q$  considere a representação  $\rho_q : U(1) \rightarrow GL(\mathbb{C})$ , dada por  $\rho_q(g) \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} = g^q \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}$ . Escrevendo

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^1(x^1, \dots, x^n) \\ \phi^2(x^1, \dots, x^n) \end{pmatrix}$$

para as coordenadas locais do pullback por alguma seção transversal de um campo de matéria e

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\alpha(x^1, \dots, x^n) = \mathcal{A}_\alpha(x^1, \dots, x^n)dx^\alpha = -\mathbf{i}\mathcal{B}_\alpha(x^1, \dots, x^n)dx^\alpha$$

para o potencial de calibre local (onde  $\mathcal{A}_\alpha$  são antissimétricas e de traço livre, enquanto  $\mathcal{B}_\alpha$  são Hermitianas e de traço livre) temos que

$$\left( \partial_\alpha \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix} + q\mathcal{A}_\alpha \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix} \right) dx^\alpha = (\partial_\alpha - \mathbf{i}q\mathcal{B}_\alpha) \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix} dx^\alpha \quad (\text{B.2.14})$$

para a expressão local correspondente do pullback de  $d^\omega \phi$ .

Do Exemplo # 2 observamos que se houver uma mudança de fase  $\phi \rightarrow e^{\mathbf{i}q\Omega}\phi$  temos que

$$\begin{aligned} (\partial_\alpha - \mathbf{i}qA_\alpha)\phi &\rightarrow (\partial_\alpha - \mathbf{q}(A_\alpha + \partial_\alpha(\Omega)))(e^{\mathbf{i}q\Omega}) \\ &= \partial_\alpha(e^{\mathbf{i}q\Omega}\phi) - \mathbf{i}qA_\alpha(e^{\mathbf{i}q\Omega}) \\ &\quad - \mathbf{i}q\partial_\alpha(\Omega)(e^{\mathbf{i}q\Omega}\phi) \\ &= e^{\mathbf{i}q\Omega}\partial_\alpha(\phi) + \mathbf{i}q\partial_\alpha(\Omega)e^{\mathbf{i}q\Omega}\phi \\ &\quad - \mathbf{i}qA_\alpha(e^{\mathbf{i}q\Omega}\phi) - \mathbf{i}q\partial_\alpha(\Omega)(e^{\mathbf{i}q\Omega}) \\ &= e^{\mathbf{i}q\Omega}(\partial_\alpha - \mathbf{i}qA_\alpha)\phi \end{aligned}$$

Logo, a função de onda  $\phi$  e a derivada covariante  $(\partial_\alpha - \mathbf{i}qA_\alpha)\phi$  (mas *não* a derivada usual  $\partial_\alpha(\phi)$ ) transforma *da mesma maneira* em relação a uma transformação de calibre. Como resultado, equações de campo que envolvem covariante ao invés de derivadas usuais podem ser invariantes por calibre. Decidir quais equações é uma questão física, e que quase sempre é feita da seguinte maneira: Escolhe-se um candidato para o que é chamada de “Lagrangiano” do sistema em questão. fazendo um apelo ao “Princípio de Menor Ação” e de um resultado básico de Cálculo Variacional (as “Equações de Euler-Lagrange”) é obtido um sistema de equações diferenciais cujas soluções tendem a imitar o que realmente

acontece no mundo físico. Faremos esse processo no próximo apêndice a fim de acharmos as Equações de Yang-Mills.



# APÊNDICE C – Derivação das Equações de Yang-Mills

## C.1 Um pouco mais de Teoria de Hodge

Considere  $(X, \mathbf{g})$  uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$ . Definimos um **homomorfismo fibrado**  $\hat{\mathbf{g}} : TX \rightarrow T^*X$  da seguinte maneira: Para cada  $p \in X$  e cada  $\mathbf{v} \in T_p(X)$ , deixamos  $\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{v}) \in T_p^*(X)$  ser o covetor definido por

$$\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{v})(\mathbf{w}) = \mathbf{g}_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad \text{para todo } \mathbf{w} \in T_p(X) \quad (\text{C.1.1})$$

Isto é um homomorfismo fibrado suave (pag 341. [Lee03]). Se  $(U, \varphi)$  é uma carta em  $X$  com funções coordenadas  $x^1, \dots, x^n$  então cada campo vetorial suave  $\mathbf{V}$

$$\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{V}) = g_{ij} \mathbf{V}^i dx^j \quad (\text{C.1.2})$$

onde a matriz  $(g_{ij})$  do homomorfismo fibrado é a mesma matriz da transformação bilinear  $\mathbf{g}$ . A matriz da inversa  $\hat{\mathbf{g}}^{-1} : T_p^*(X) \rightarrow T_p(X)$  é portanto a inversa de  $(g_{ij})$  e a denotamos por  $(g^{ij})$ , de modo

$$g^{ij} g_{jk} = g_{kj} g^{ji} = \delta_k^i$$

Logo, para cada covetor  $\Theta \in \mathfrak{X}^*(X)$ , o campo vetorial  $\hat{\mathbf{g}}^{-1}(\Theta)$  possui a representação em coordenadas

$$\hat{\mathbf{g}}^{-1}(\Theta) = \Theta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (\text{C.1.3})$$

onde  $\Theta^i = g^{ij} \Theta_j$ . Usamos a notação  $\Theta^\sharp$  para denotar  $\hat{\mathbf{g}}^{-1}(\Theta)$ . Para cada  $k = 1, \dots, n$  a métrica  $\mathbf{g}$  determina um único produto interno em  $\Lambda^k(T_p^*(X))$  denotado por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{g}}$  satisfazendo

$$\langle \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k, \eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^k \rangle = \det \left( \langle (\omega^i)^\sharp, (\eta^j)^\sharp \rangle_{\mathbf{g}} \right) \quad (\text{C.1.4})$$

onde  $\omega^1, \dots, \omega^k, \eta^1, \dots, \eta^k$  são covetores em  $p$ . Com efeito, tome  $\{\varepsilon^I|_p; I \text{ é crescente}\}$  uma base ortonormal de  $\Lambda^k(T_p^*(X))$  onde  $(\varepsilon^i)$  é um coreferencial dual de um referencial ortonormal. Então temos

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon^I, \varepsilon^J \rangle_{\mathbf{g}} &= \begin{pmatrix} \langle (\varepsilon^{i_1})^\sharp, (\varepsilon^{j_1})^\sharp \rangle_{\mathbf{g}} & \cdots & \langle (\varepsilon^{i_1})^\sharp, (\varepsilon^{j_k})^\sharp \rangle_{\mathbf{g}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle (\varepsilon^{i_k})^\sharp, (\varepsilon^{j_1})^\sharp \rangle_{\mathbf{g}} & \cdots & \langle (\varepsilon^{i_k})^\sharp, (\varepsilon^{j_k})^\sharp \rangle_{\mathbf{g}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{g}^{i_1 j_1} & \cdots & \mathbf{g}^{i_1 j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{g}^{i_k j_1} & \cdots & \mathbf{g}^{i_k j_k} \end{pmatrix} \\
&= \delta_J^I
\end{aligned}$$

Estendendo por linearidade fica determinado um produto interno em  $\Lambda^k(T_p^*(X))$ . Resta mostrar que esta definição não depende da escolha do frame (base do espaço tangente). Seja  $(\tilde{\varepsilon}^i)$  outro frame ortonormal de  $T_P(X)$ . Então existe uma transformação ortonormal tal que  $\tilde{\varepsilon}^{j_k} = T_{i_k}^{j_k} \varepsilon^{i_k}$ . Logo

$$\begin{aligned}
\det(\langle (\tilde{\varepsilon}^{i_k})^\sharp, (\tilde{\varepsilon}^{j_k})^\sharp \rangle_{\mathbf{g}}) &= \det(\langle (T_{i_k}^{j_k} \varepsilon^{i_1})^\sharp, (T_{i_k}^{j_k} \varepsilon^{j_k})^\sharp \rangle_{\mathbf{g}}) \\
&= \det(\langle T_{i_k}^{j_k} (\varepsilon^{i_k})^\sharp, T_{i_k}^{j_k} (\varepsilon^{j_k})^\sharp \rangle_{\mathbf{g}}) \\
&= \det(\langle (\varepsilon^{i_k})^\sharp, T_{i_k}^{j_k} T_{i_k}^{j_k} (\varepsilon^{j_k})^\sharp \rangle_{\mathbf{g}}) \\
&= \det(\langle (\varepsilon^{i_k})^\sharp, (\varepsilon^{j_k})^\sharp \rangle_{\mathbf{g}})
\end{aligned}$$

A unicidade do produto interno é clara. Para cada  $k = 0, \dots, n$  existe um único homomorfismo  $*$  :  $\Lambda^k(T^*(X)) \rightarrow \Lambda^{n-k}(T^*(X))$  satisfazendo

$$\omega \wedge * \eta = \langle \omega, \eta \rangle_{\mathbf{g}} dV_{\mathbf{g}} \quad (\text{C.1.5})$$

Registraremos algumas propriedades desse homomorfismo.

1.  $*1 = dV_{\mathbf{g}}$  e  $*dV_{\mathbf{g}} = 1$ ;
2.  $*(\omega) = (-1)^{k(n-k)} \omega$ , para toda  $k$ -forma  $\omega \in \Lambda^k(T^*(X))$ .

Para todo  $0 \leq k \leq n$  definimos  $*_p : \Omega^k(X) \rightarrow \Omega^{n-k}(X)$  ponto a ponto, i.e., para cada  $p \in X$  fazemos  $*_p : \Lambda^k(T_p^*(X)) \rightarrow \Lambda^{n-k}(T_p^*(X))$ . Este isomorfismo é chamado **Operador de Hodge**. Para todo  $k = 0, \dots, n$ ,  $*_p : \Omega^k(X) \rightarrow \Omega^{n-k}(X)$  é uma aplicação suave.

Para  $1 \leq k \leq n$  definimos a aplicação  $d^* : \Omega^k(X) \rightarrow \Omega^k(X)$  por

$$d^* \omega = (-1)^{n(k+1)+1} * d * \omega \quad (\text{C.1.6})$$

onde  $*$  é o operador de Hodge. Estendemos esta definição para 0-formas pondo  $d^* \omega = 0$  para todo  $\omega \in \Omega^0(X)$ . Esta extensão  $d^* : \Omega^*(X) \rightarrow \Omega^*(X)$  é chamada **operador de Beltrami**. Afirmamos que vale  $d^* \circ d^* = 0$ . De fato, segue da propriedade (2) do operador de Hodge e das propriedades de (2.1.31) de Hodge que

$$d^* \circ d^* = \pm * d * d^* = \pm * d \text{ id } d^* = 0 * d^2 * = 0$$

Para  $k \in \mathbb{N}$  e  $X$  uma variedade Riemanniana compacta, orientável de dimensão  $n$  definimos a seguinte forma bilinear  $(\ , \ ) : \Omega^k(X) \times \Omega^k(X) \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\omega, \eta) = \int_X \langle \omega, \eta \rangle_g dV_g \quad (\text{C.1.7})$$

onde  $\langle \omega, \eta \rangle_g$  é o produto interno definido ponto a ponto como em (C.1.5). Mostramos no resultado a seguir que esta forma bilinear é um produto interno de  $\Omega^k(X)$ .

**Proposição C.1.1.** *Seja  $X$  uma variedade Riemannian compacta, orientada de dimensão  $n$ . A forma bilinear  $(\ , \ ) : \Omega^k(X) \times \Omega^k(X) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$(\omega, \eta) = \int_X \langle \omega, \eta \rangle_g dV_g$$

*é um produto interno de  $\Omega^k(X)$ . Além disso, o operador de Beltrami  $d^*$  é a adjunta da derivada exterior (covariante) em relação ao produto interno dado por (C.1.7), i.e.,*

$$(d\omega, \eta) = (\omega, d^*\eta) \quad (\text{C.1.8})$$

para todo  $\omega \in \Omega^{k-1}(X)$  e para todo  $\eta \in \Omega^k(X)$

**Demonstração.** A simetria, a bilinearidade, e o fato de ser não-degenerado de (C.1.7) são óbvios. Além disso  $(\ , \ )$  é não negativo pois

$$(\omega, \omega) = \int_X \langle \omega, \omega \rangle_g dV_g = \langle \omega, \omega \rangle_g \int_X dV_g \geq 0$$

valendo a igualdade somente se  $\omega = 0$ . Com isto, concluímos que  $(\ , \ )$  é um produto interno.

Como consequência de (2.1.32) para uma  $k$ -forma  $\omega$  e uma  $l$ -forma  $\eta$ , tem-se que

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

Então

$$d\omega \wedge *\eta = d(\omega \wedge \eta) + (-1)^k d * \eta$$

integrando ambos lados sobre  $X$ , usando a propriedade (2) e o Teorema de Stokes segue que

$$\begin{aligned} d(\omega, \eta) &= \int_X d\omega \wedge *\eta = \int_X d(\omega \wedge \eta) + (-1)^k \int_X \omega \wedge (-1)^k d * \eta \\ &= \int_{\partial X = \emptyset} \omega \wedge \eta + (-1)^k \int_X \omega \wedge (-1)^{(n-k+1)(1-k)} * (*d * \eta). \\ &= (-1)^k \int_X \omega \wedge (-1)^{(n-k+1)(1-k)} * (*d * \eta) \end{aligned}$$

Usando o fato de que  $k^2 + k$  é sempre par, temos que  $(-1)^{(n-k+1)(1-k)} = (-1)^{n(k+1)+1}$ , logo segue que

$$(d\omega, \eta) = \int_X \omega \wedge *((-1)^{n(k+1)+1} * d * \eta) = (\omega, d^* \eta).$$

■

## C.2 Equações de Yang-Mills

Nesta seção apresentamos uma prova das equações de Yang-Mills fazendo uso do método de variações de parâmetros do cálculo variacional. Para isso, considere o funcional de Yang-Mills dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{YM}(\mathcal{A}) &= - \int_{\mathbb{R}^4} 2\text{tr} (\mathcal{F} \wedge * \mathcal{F}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} \|\mathcal{F}(q)\|^2 d(\text{vol}_{\mathbb{R}^4}) \end{aligned} \quad (\text{C.2.1})$$

onde  $*$  é o operador dual de Hodge,  $\alpha, \beta = 1, \dots, 4$ . Considere  $(V, \varphi)$  uma carta com funções coordenadas e em  $V$ , escrevemos  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\alpha dx^\alpha$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\beta dx^\beta$ ,  $\mathcal{F} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$  com

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \mathcal{A}_\beta - \partial_\beta \mathcal{A}_\alpha + [\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\beta] \quad (\text{C.2.2})$$

onde  $\mathcal{A}_\alpha$  e  $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$  são funções definidas em  $V$  com valores em  $\mathfrak{g}$ .

Dada uma conexão  $\mathcal{A} \in \mathcal{A}(P)$  (espaços das conexões de  $P$ ) escolhemos uma família a 1-parâmetro  $\mathcal{A} + t\mathcal{B}$  (conjunto dos potenciais de calibre é um espaço afim, ver [AB83]), então a derivada direcional  $\delta$  de calibre é dada por

$$\delta(\mathcal{YM}(\mathcal{A} + t\mathcal{B})) = \left. \frac{d}{dt} \left( \mathcal{YM}(\mathcal{A} + t\mathcal{B}) \right) \right|_{t=0} \quad (\text{C.2.3})$$

Primeiro escrevemos a curvatura  $\mathcal{F}_{\mathcal{A}+t\mathcal{B}}$ . A partir de (C.2.2), de (3.2.4) e (3.2.6) obtemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathcal{A}+t\mathcal{B}} &= \frac{1}{2} \left( \partial_\alpha (\mathcal{A}_\beta + t\mathcal{B}_\beta) - \partial_\beta (\mathcal{A}_\alpha + t\mathcal{B}_\alpha) + [\mathcal{A}_\alpha + t\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{A}_\beta + t\mathcal{B}_\beta] \right) dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
&= \frac{1}{2} \left( \partial_\alpha \mathcal{A}_\beta - t\partial_\alpha \mathcal{B}_\beta - \partial_\beta \mathcal{A}_\alpha - t\partial_\beta \mathcal{B}_\alpha + [\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\beta] \right. \\
&\quad \left. + t[\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{B}_\beta] + t[\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{A}_\beta] + t^2[\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{B}_\beta] \right) dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
&= \left( \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\alpha\beta} + \frac{t}{2} (\partial_\alpha \mathcal{B}_\beta - \partial_\beta \mathcal{B}_\alpha + [\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{B}_\beta] + [\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{A}_\beta]) + \frac{t^2}{2} [\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{B}_\beta] \right) dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta + \frac{t}{2} \left( (\partial_\alpha \mathcal{B}_\beta - \partial_\beta \mathcal{B}_\alpha) dx^\alpha \wedge dx^\beta + [\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{B}_\beta] dx^\alpha \wedge dx^\beta \right. \\
&\quad \left. + [\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{A}_\beta] dx^\alpha \wedge dx^\beta \right) + \frac{t^2}{2} [\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{B}_\beta] dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta + t \left( \frac{1}{2} (\partial_\alpha \mathcal{B}_\beta - \partial_\beta \mathcal{B}_\alpha) dx^\alpha \wedge dx^\beta + \frac{1}{2} [\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{B}_\beta] dx^\alpha \wedge dx^\beta \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} [\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{B}_\beta] dx^\beta \wedge dx^\alpha \right) + \frac{t^2}{2} [\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{B}_\beta] dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta + t \left( \frac{1}{2} (\partial_\alpha \mathcal{B}_\beta - \partial_\beta \mathcal{B}_\alpha) dx^\alpha \wedge dx^\beta + [\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{B}_\beta] dx^\alpha \wedge dx^\beta \right) \\
&\quad + \frac{t^2}{2} [\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{B}_\beta] dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
&= \mathcal{F}_{\mathcal{A}} + td^{\mathcal{A}}\mathcal{B} + \frac{t^2}{2} [\mathcal{B}, \mathcal{B}]
\end{aligned}$$

onde  $d^{\mathcal{A}}$  é a derivada exterior covariante de  $\mathcal{B}$  definida por

$$d^{\mathcal{A}}\mathcal{B} = d\mathcal{B} + [\mathcal{A}, \mathcal{B}] \quad (\text{C.2.4})$$

Agora, calculemos a norma da curvatura

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}_{\mathcal{A}+t\mathcal{B}}\|^2 &= \langle \mathcal{F}_{\mathcal{A}+t\mathcal{B}}, \mathcal{F}_{\mathcal{A}+t\mathcal{B}} \rangle \\
&= \left\langle \mathcal{F}_{\mathcal{A}} + td^{\mathcal{A}}\mathcal{B} + \frac{t^2}{2} [\mathcal{B}, \mathcal{B}], \mathcal{F}_{\mathcal{A}} + td^{\mathcal{A}}\mathcal{B} + \frac{t^2}{2} [\mathcal{B}, \mathcal{B}] \right\rangle \\
&= \|\mathcal{F}_{\mathcal{A}}\|^2 + 2t \langle d^{\mathcal{A}}\mathcal{B}, \mathcal{F}_{\mathcal{A}} \rangle + t^2 (\|d^{\mathcal{A}}\mathcal{B}\|^2 + \langle \mathcal{F}_{\mathcal{A}}, [\mathcal{B}, \mathcal{B}] \rangle) \\
&\quad + t^3 \langle d^{\mathcal{A}}\mathcal{B}, [\mathcal{B}, \mathcal{B}] \rangle + \frac{t^4}{4} \|[\mathcal{B}, \mathcal{B}]\|^2
\end{aligned}$$

Como queremos a condição de mínimo, obtemos da Proposição C.1.1 que

$$\begin{aligned}
0 &= \delta(\mathcal{YM}(\mathcal{A})) = 2 \int_{\mathbb{R}^4} \langle d^{\mathcal{A}}\mathcal{B}, \mathcal{F}_{\mathcal{A}} \rangle d(\text{vol}_{\mathbb{R}^4}) \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^4} \langle \mathcal{B}, (d^{\mathcal{A}})^* \mathcal{F}_{\mathcal{A}} \rangle d(\text{vol}_{\mathbb{R}^4})
\end{aligned}$$

para todo  $\mathcal{B} \in \mathcal{A}(P)$ . Logo  $(d^{\mathcal{A}})^* \mathcal{F}_{\mathcal{A}} = 0$ , i.e.,

$$(-1)^{4(2+1)+1} * d^{\mathcal{A}} * \mathcal{F} = 0 \implies *d^{\mathcal{A}} * \mathcal{F} = 0 \quad (\text{C.2.5})$$

Como  $*$  é invertível, temos que

$$d^A * \mathcal{F} = 0 \quad (\text{C.2.6})$$

E chegamos onde queríamos, nas chamadas **equações de Yang-Mills**.

### C.3 Identidade de Bianchi

Nesta seção mostramos a identidade de Bianchi mencionada em (1.2.2). De modo geral, considere  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} X$  um  $G$ -fibrado principal com conexão  $\omega$  e curvatura  $\Omega = d^{\omega}\omega$ . Então

$$d^{\omega}\Omega = 0 \quad (\text{C.3.1})$$

Calculemos da definição de derivada exterior covariante (C.2.4)

$$\begin{aligned} d^{\omega}\Omega &= d\Omega + [\omega, \Omega] \\ &= d\left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]\right) + \left[\omega, d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]\right] \\ &= d(d\omega) + \frac{1}{2}d([\omega, \omega]) + [\omega, d\omega] + \frac{1}{2}[\omega, [\omega, \omega]] \\ &= \frac{1}{2}d([\omega, \omega]) + [\omega, d\omega] \\ &= \frac{1}{2}([d\omega, \omega] - [\omega, d\omega]) + [\omega, d\omega] \\ &= \frac{1}{2}([\omega, d\omega] - [\omega, d\omega]) + [\omega, d\omega] = 0 \end{aligned}$$

e obtemos (C.3.1). A aplicação disso vem em mostrar de maneira trivial que se  $*\mathcal{F} = -\mathcal{F}$  então pela identidade de Bianchi  $\mathcal{F}$  satisfaz (C.2.6).

## APÊNDICE D – Teorema de Donaldson

Neste apêndice, exporemos a ideia do Teorema de Donaldson, a partir de resultados de topologia, apresentando uma interpretação visual do teorema, tudo isto feito para o caso de variedades com certas restrições, das quais passamos a discutir agora.

Consideraremos variedades de dimensão 4 compactas, simplesmente conexas, orientáveis e as denotaremos por  $M$ . Exemplos incluem a esfera  $S^4$ , o produto  $S^2 \times S^2$  de duas esferas, o plano complexo projetivo  $\mathbb{CP}^2$ .  $\mathbb{CP}^2$  possui uma orientação natural pois é uma variedade complexa (as aplicações de transição do Capítulo 2 não são apenas suaves, mas analíticas). Denotamos por  $\overline{\mathbb{CP}}^2$  a mesma variedade porém com orientação oposta. Um exemplo novo é a superfície de Kummer  $K3$  que pode ser vista como uma subvariedade de  $\mathbb{CP}^3$  que consiste dos pontos cujas coordenadas homogêneas  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$  satisfazem  $\mathbf{x}_1^4 + \mathbf{x}_2^4 + \mathbf{x}_3^4 + \mathbf{x}_4^4 = 0$ .

Apresentamos, agora, alguns resultados mais avançados (sem prova) de topologia para estas variedades. Como  $M$  é conexo, tem-se que o grupo de homologia  $H_0(M) \cong \mathbb{Z}$ . Sendo simplesmente conexo ( $\pi_1(M) \cong 0$ ) o teorema de Hurewicz ( $H_1(X) \cong \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ ) implica que  $H_1(M) \cong 0$ . O Teorema de Coeficientes Universal e a Dualidade de Poincaré implicam que  $H_4(M) \cong \mathbb{Z}$ ,  $H_3(M) \cong 0$ , e  $H_2(M)$  é um grupo Abelian livre, finitamente gerado e portanto completamente determinado pelo número de Betti  $b_2(M)$ . Em particular, duas variedades do tipo que estamos considerando podem diferir homologicamente somente em  $H_2(M)$ . Outra propriedade deste tipo de variedade é que qualquer classe de homologia em  $H_2(M)$  possui um representante, que é uma superfície (variedade bidimensional) mergulhada suavemente, compacta e orientável em  $M$ .

A forma de interseção de  $M$  é uma certa forma bilinear

$$Q_M : H_2(M) \times H_2(M) \rightarrow \mathbb{Z} \quad (\text{D.0.1})$$

a qual definimos da seguinte maneira: Para variedades  $M$ , como  $S^4$ , com  $H_2(M) \cong 0$ ,  $Q_M$  é a forma vazia. Caso contrário, se  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são duas classes em  $H_2(M)$ , escolhemos duas superfícies mergulhadas suavemente, compactas, orientáveis  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  que as representam. Pelo Teorema de Transversalidade pode-se perturbar  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  ligeiramente sem que elas deixem suas classes de homologia e de tal modo que as superfícies resultantes intersectem-se transversalmente, i.e., para cada ponto  $p$  na interseção  $T_p(M) \cong T_p(\Sigma_1) \oplus T_p(\Sigma_2)$ . Como  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  possuem dimensões complementares ( $2 + 2 = 4$ ) isto implica que  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$  é um conjunto finito de pontos isolados (ver Figura D.1). Um ponto na interseção  $p$  é dado o valor  $+1$  se uma base orientada de  $T_p(\Sigma_1)$  seguida de uma base orientada de  $T_p(\Sigma_2)$  é uma base orientada de  $T_p(M)$ ; caso contrário, dá-se o valor  $-1$ .  $Q_M(\alpha_1, \alpha_2)$  é a soma desses valores ao longo de todos os pontos de interseção.

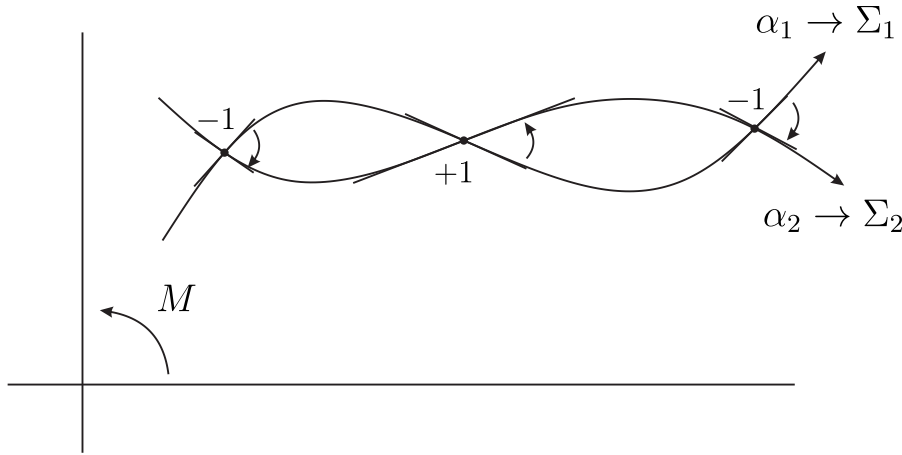


Figura D.1 – Fonte: Elaborada pelo autor.

Com isso,  $Q_M$  é uma forma bilinear, simétrica, e além disso, é unimodular (no sentido que sua matriz relativa a qualquer base de  $H_2(M)$  possui determinante  $\pm 1$ ). Se  $H_2(M) \not\cong 0$ , a dimensão maximal de um subespaço de  $H_2(M)$  no qual  $Q_M$  é não-negativo (respectivamente, não-positivo) é denotado por  $b_2^+(M)$  (respectivamente por  $b_2^-(M)$ ). Então  $b_2(M) = b_2^+(M) + b_2^-(M)$ . A **assinatura** de  $Q_M$  (ou de  $M$ ) é definida por

$$\sigma(Q_M) = \sigma(M) = b_2^+(M) - b_2^-(M). \quad (\text{D.0.2})$$

A seguir colocamos uma lista com alguns exemplos onde  $Q_M$  é representada por sua matriz relativa a alguma base (não especificada) de  $H_2(M)$ .

$M$	$H_2(M)$	$Q_M$	$b_2^+(M)$
$S^4$	$0$	$\emptyset$	$--$
$\mathbb{CP}^2$	$\mathbb{Z}$	$(1)$	$1$
$\overline{\mathbb{CP}}^2$	$\mathbb{Z}$	$(-1)$	$0$
$S^2 \times S^2$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$1$
$K3$	$22\mathbb{Z}$	$3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2(-E_8)$	$3$

Aqui  $E_8$  é a chamada matriz de Cartan para a álgebra de Lie  $e_8$  e é dada por



$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

É conhecido na literatura ([Don89]) que a forma de interseção é um invariante básico para variedades de dimensão 4. Em 1949, Whitehead [Whi49] provou que duas variedades de dimensão 4, compactas, simplesmente conexas  $M_1$  e  $M_2$  possuem o mesmo tipo de homotopia se, e somente se, suas formas de interseção são equivalente (ou seja, existem bases de  $H_2(M_1)$  e  $H_2(M_2)$  para as quais  $Q_{M_1}$  e  $Q_{M_2}$  possuem a mesma matriz). Em 1982, Freedman [Fre82] mostrou que qualquer forma bilinear simétrica, unimodular, com valores em  $\mathbb{Z}$  em um grupo Abelianamente finitamente gerado é a forma de interseção para pelo menos uma (e no máximo duas) variedade (s) *topológicas* de dimensão 4, orientáveis, simplesmente conexas e compactas. Em 1983, Donaldson [Don83] mostrou que existe apenas *uma* forma bilinear não-positiva/negativa simétrica, unimodular com valores em  $\mathbb{Z}$  que pode ser a forma de interseção de uma variedade diferenciável de dimensão 4, orientável, simplesmente conexa e compacta.

**Teorema D.0.1. (*Teorema de Donaldson*)** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão 4 orientável, simplesmente conexa e compacta com uma forma de interseção não-negativa (respectivamente, não-positiva). Então existe uma base de  $H_2(M)$  para a qual a matriz de  $Q_M$  é a matriz identidade (respectivamente, menos a matriz identidade).*

O Teorema de Donaldson juntamente com o Teorema de Freedman, providencia um grande repertório de exemplos de variedades de dimensão 4 que não admitem estrutura diferenciável alguma. Uma combinação menos óbvia dos dois teoremas prova a existência de **falsos**  $\mathbb{R}^4$ 's, ou seja, variedades de dimensão 4 diferenciáveis que são homeomorfas a  $\mathbb{R}^4$  porém não são difeomorfas (fenômeno que não ocorre para outro  $\mathbb{R}^n$ ).

A prova é uma combinação da análise de um espaço moduli em  $M$  bem parecido com o espaço moduli de  $S^4$  que estudamos em detalhes. Vamos então passar a expor a ideia de maneira bem resumida para o caso não-positivo, ou seja, de modo que  $b_2^+(M) = 0$ , mas  $b_2(M) \neq 0$ .

Como falado anteriormente os  $SU(2)$ -fibrados principais sobre  $S^4$  estão em correspondência biunívoca com os inteiros e segue da teoria de classes características que o mesmo é verdade para qualquer variedade  $M$  que estamos considerando. Começamos o argumento

do Teorema de Donaldson selecionando o  $SU(2)$ -fibrado sobre  $M$  análogo ao fibrado de Hopf sobre  $S^4$ , a saber, com número de Chern 1. Denotamos simplesmente por

$$SU(2) \rightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} M. \quad (\text{D.0.3})$$

Agora escolha uma métrica Riemanniana  $\mathbf{g}$  para  $M$ . Vale ter em mente que tanto o fibrado quanto a métrica são objetos auxiliares que facilitam o estudo de  $M$ . A partir de  $\mathbf{g}$  e da orientação dada de  $M$  obtém-se o operador estrela de Hodge  $*$  sobre formas definidas em  $M$ . Como  $\dim M = 4$ , o dual de Hodge de uma 2-forma é uma 2-forma.

Agora seja  $\omega$  uma conexão em  $SU(2) \rightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} M$ . A curvatura  $\Omega$  é uma 2-forma em  $P$  com valores na álgebra de Lie (*não* em  $M$ ). Entretanto, fazendo o pullback de  $\Omega$  por uma seção local que corresponde a alguma trivialização nos dá uma família de 2-formas em  $M$  com valores na álgebra de Lie que estão relacionadas pela ação adjunta de  $SU(2)$  sobre sua álgebra de Lie,

$$s_2^* \Omega = ad_{g_{12}^{-1}} \circ s_1^* \Omega. \quad (\text{D.0.4})$$

Como resultado estas formas definem 2-formas localmente em  $M$  com valores na álgebra de Lie e formam uma 2-forma  $F_\omega$  definida globalmente em  $M$  não tomando valores em  $\mathfrak{su}(2)$  mas em no fibrado adjunto  $ad P$  (ver B.2.4). Dizemos que um elemento  $\phi$  de  $\Lambda^k(P, \mathcal{V})$  é **tipo- $\rho$  tensorial** se satisfaz

- (a)  $\sigma_{\mathbf{g}}^* \phi = g^{-1} \cdot \phi$ , onde  $\sigma_{\mathbf{g}} : P \rightarrow P$  é a aplicação  $\sigma_{\mathbf{g}}(p) = p \cdot g$  em  $P$  e  $g^{-1} \cdot \phi$  denota a ação de  $\rho(g^{-1})$  sobre os valores de  $\phi$ ;
- (b)  $\phi$  é horizontal, i.e., se anula se qualquer de seus argumentos for tangente à fibra.

O subespaço  $\Lambda_{\rho}^k(P, \mathcal{V})$  de  $\Lambda^k(P, \mathcal{V})$  que consiste de todos os elementos que são do tipo- $\rho$  tensoriais é isomorfo a  $\Lambda^k(X, P \times_{\rho} \mathcal{V})$ . O isomorfismo pode ser descrito por  $\phi \mapsto \bar{\phi} = [s, s^* \phi]$ , onde  $s$  é uma seção transversal arbitrária de  $P$ . Como a curvatura  $\Omega$  de uma conexão  $\omega$  é claramente do tipo- $ad$  tensorial, corresponde a um  $F_\omega \in \Lambda^2(X, ad P)$ .

O ponto é que, sendo uma 2-forma na variedade  $M$  de dimensão 4,  $F_\omega$  possui um dual de Hodge  $*F_\omega$  o qual também é uma 2-forma em  $M$ , logo faz sentido em dizer que a conexão  $\omega$  é  **$\mathbf{g}$ -anti-auto-dual ( $\mathbf{g}$ -ASD)** se

$$*F_\omega = -F_\omega \quad (\text{D.0.5})$$

**Observação D.0.1.** A definição faz sentido, porém não é nada claro que estes objetos devam existir. Na verdade, é um Teorema profundo de Taubes [Tau80] que, como  $b_2^+(M) = 0$ , de fato existem conexões  $\mathbf{g}$ -ASD no fibrado (com número de Chern 1)  $SU(2) \rightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} M$ . Se  $M$  for  $S^2 \times S^2$  ( $b_2^+ = 1$ ) com esta métrica e orientação então não existem estas conexões no  $SU(2)$ -fibrado correspondente. O mesmo é verdade para  $\mathbb{CP}^2$ , entretanto, não para  $\overline{\mathbb{CP}}^2$  (a teoria de Donaldson depende fortemente de orientação).

O **grupo de calibre**  $\mathcal{G}(P)$  de nosso fibrado é o grupo (em relação à composição) de todos os difeomorfismos  $F : P \rightarrow P$  que respeitam a ação do grupo no fibrado ( $f(p \cdot g) = f(p) \cdot g$ , para todo  $p \in P$  e  $g \in SU(2)$ ) e respeitem  $\mathcal{P} \circ f = \mathcal{P}$ . Os elementos de  $\mathcal{G}(P)$  são chamados **transformações globais de calibre** e agem sobre as conexões por pullback ( $\omega \cdot f = f^*\omega$ ). Duas conexões  $\omega$  e  $\omega'$  são **equivalentes por calibre** se existe  $f$  em  $\mathcal{G}(P)$  tal que  $\omega' = f^*\omega$ . A coleção de todas as classes de equivalências de todas as conexões  $\mathfrak{g}$ -ASD em  $SU(2) \rightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} M$  é denotada por

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(P, \mathfrak{g}) \quad (\text{D.0.6})$$

e chamada de **espaço moduli** das conexões  $\mathfrak{g}$ -ASD (instantons) em  $SU(2) \rightarrow P \xrightarrow{\mathcal{P}} M$ .

Escolhemos a métrica Riemanniana  $\mathfrak{g}$  e acontece que se escolhermos a métrica de um jeito ruim o espaço moduli  $\mathcal{M}(P, \mathfrak{g})$  pode nem ter uma estrutura matemática decente. Entretanto, Donaldson mostrou que, para uma escolha “genérica” de  $\mathfrak{g}$ , o espaço moduli tem a seguinte forma:

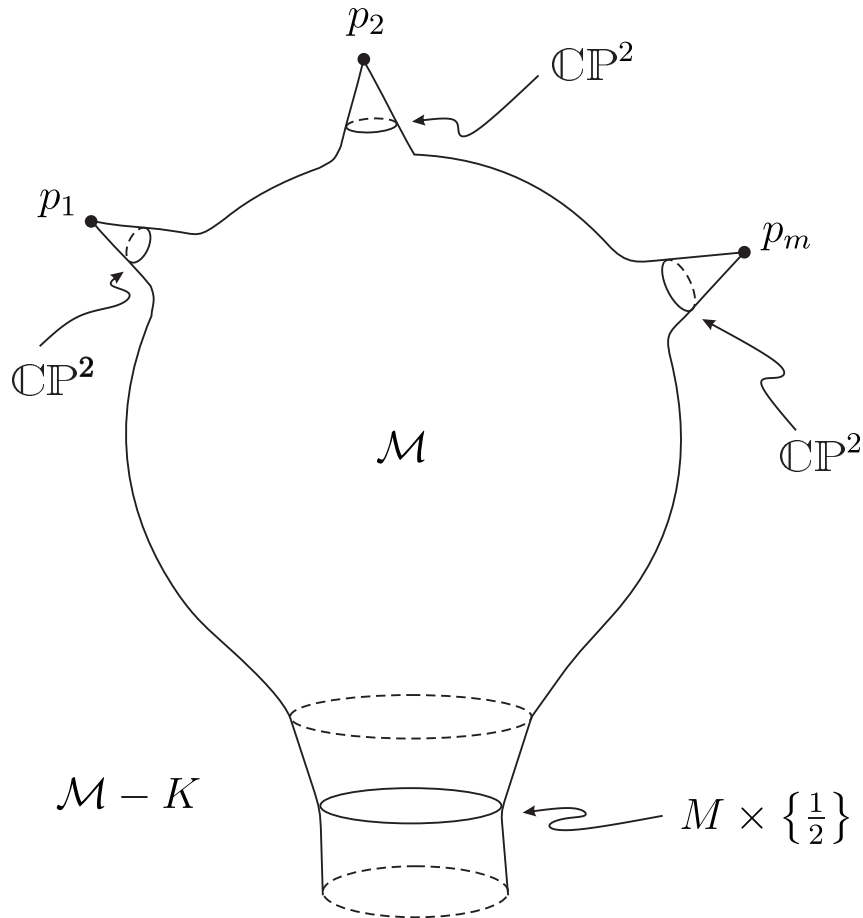


Figura D.2 – Fonte: Naber, 2010, pag. 408.

De uma maneira mais precisa:

1. Se  $m$  é a metade do número de  $\alpha \in H_2(M)$  com  $Q_M(\alpha, \alpha) = -1$ , então existem pontos  $p_1, \dots, p_m$  em  $\mathcal{M}$  tais que  $\mathcal{M} - \{p_1, \dots, p_m\}$  é uma variedade diferenciável de dimensão 5 orientável.

2. Cada  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  possui uma vizinhança em  $\mathcal{M}$  homeomorfa a um cone sobre  $\mathbb{CP}^2$  com vértice  $p_i$  e estas vizinhanças são diferenciáveis em todo ponto menos  $p_i$  (o cone sobre  $\mathbb{CP}^2$  é obtido a partir do cilindro  $\mathbb{CP}^2 \times [0, 1]$  identificando  $\mathbb{CP}^2 \times \{1\}$  com um ponto que depois é chamado de vértice do cone).

3. Existe um subespaço compacto  $K$  de  $\mathcal{M}$  tal que  $\mathcal{M} - K$  é uma subvariedade de  $\mathcal{M} - \{p_1, \dots, p_m\}$  difeomorfa ao cilindro  $M \times (0, 1)$ .

Agora construa a partir de  $\mathcal{M}$  outro espaço  $\mathcal{M}_0$  cortando fora a metade aberta do topo de cada cone e o fundo aberto do cilindro (Figura D.3):

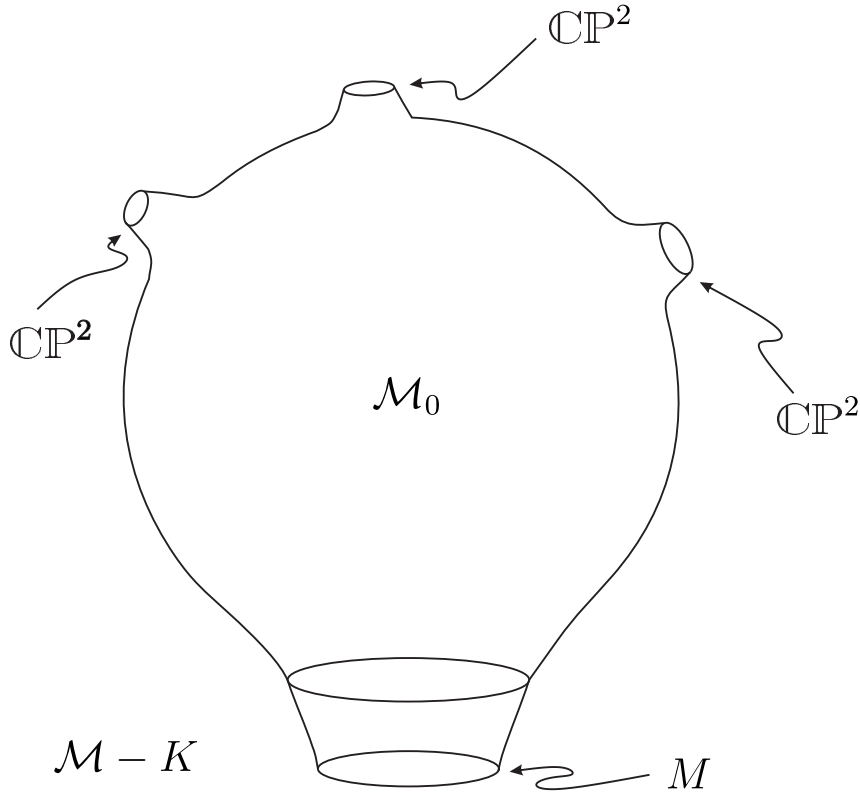


Figura D.3 – Fonte: Naber, 2010, pag. 409.

Então  $\mathcal{M}_0$  é uma variedade compacta com bordo que herda uma orientação de  $\mathcal{M}$ . O bordo consiste de uma união disjunta de uma cópia de  $\mathcal{M}$  e  $m$  cópias de  $\mathbb{CP}^2$  ou  $\overline{\mathbb{CP}}^2$ . Suponha que existem  $p$  cópias de  $\mathbb{CP}^2$  e  $q$  cópias de  $\overline{\mathbb{CP}}^2$  ( $p + q = m$ ).  $\mathcal{M}_0$  é chamado de cobordismo orientado entre  $M$  e a união disjunta  $\mathbb{CP}^2 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{CP}^2 \sqcup \overline{\mathbb{CP}}^2 \sqcup \dots \sqcup \overline{\mathbb{CP}}^2 = p\mathbb{CP}^2 \sqcup q\overline{\mathbb{CP}}^2$  e acontece que a assinatura da forma de interseção é um invariante por cobordismo, i.e., as formas de interseção de  $M$  e  $p\mathbb{CP}^2 \sqcup q\overline{\mathbb{CP}}^2$  possuem a mesma assinatura. Logo, como  $b_2^+(M) = 0$ ,

$$\begin{aligned} b_2^+(M) - b_2^-(M) &= p - q \\ b_2^-(M) &= q - p \end{aligned}$$

portanto

$$b_2(M) = q - p \leq q + p = m$$

Em seguida mostramos que  $b_2(M) \geq m$ . Tome algum  $\alpha_1 \in H_2(M)$  com  $Q_M(\alpha_1, \alpha_1) = -1$  (deve existir pelo menos um, pois  $b_2^+(M) = 0$ , mas  $b_2(M) \neq 0$ ). Então existe uma decomposição  $Q_M$ -ortogonal

$$H_2(M) = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus G_1 \quad (\text{D.0.7})$$

Agora considere qualquer  $\alpha_2 \in H_2(M)$  com  $Q_M(\alpha_2, \alpha_2) = -1$  e  $\alpha_2 \neq \alpha_1$  (caso não exista  $\alpha_2$ , então  $G_1 = \emptyset$  logo  $H_2(M) = \mathbb{Z}\alpha_1$  e  $\{\alpha_1\}$  é uma base de  $H_2(M)$  em relação a qual a matriz de  $Q_M$  é  $-(1)$  e acabou). A desigualdade de Schwartz nos dá

$$(Q_M(\alpha_1, \alpha_2))^2 < Q_M(\alpha_1, \alpha_1)Q_M(\alpha_2, \alpha_2) = 1 \quad (\text{D.0.8})$$

Mas  $Q_M(\alpha_1, \alpha_2)$  é um inteiro. Então  $Q_M(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ , logo  $\alpha_2 \in G_1$ . Agora repita o argumento em  $G_1$  e prossiga indutivamente até que saia de  $\alpha \in H_2(M)$  com  $Q_M(\alpha, \alpha) = -1$ . Existem  $2m$  classes  $\alpha$  e elas ocorrem em pares  $(\alpha, -\alpha)$ , logo o resultado é uma decomposição  $Q_M$ -ortogonal,

$$H_2(M) = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\alpha_m \oplus G \quad (\text{D.0.9})$$

onde  $G$  é vazio ou o é complemento  $Q_M$ -ortogonal de  $\mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\alpha_m$ . Em particular,  $m \leq b_2(M)$ . Como mostramos que  $b_2(M) \leq m$  temos que

$$b_2(M) = m = p + q. \quad (\text{D.0.10})$$

Como  $H_2(M)$  é um grupo Abelian livre finitamente gerado,  $G$  deve se vazio e

$$H_2(M) = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\alpha_m. \quad (\text{D.0.11})$$

Como  $Q_M(\alpha_i, \alpha_i) = -1$  para  $i = 1, \dots, m$ , a matriz de  $Q_M$  em relação à base  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$  é menos a identidade e fica provado o teorema para este caso.

É preciso deixar claro como é construída a estrutura de  $\mathcal{M}$  mas não faremos isso aqui. Para os detalhes do Teorema de Donaldson recomendamos [FU84] e [Law85]. Em qualquer caso, este é apenas o começo da história que continua com os invariantes de Donaldson, topologia da teoria de física quântica e Teoria de Calibre de Seiberg- Witten.

# Referências

- [AB59] Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, pages 485–491, 1959.
- [AB83] M.F. Atiyah and R. Bott. *The Yang-Mills equations over Riemann Surfaces*, volume 308, pages 547–554. 1983.
- [AHS78] M.F. Atiyah, N.J. Hitchin, and I.M. Singer. Self duality in four dimensional Riemannian geometry. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, pages 425–461, 1978.
- [Ati79] M. F. Atiyah. Geometry of yang-mills fields. Lezioni Fermiane Accademia Nazionale dei Lincei Scuola Normale Superiore, Pisa, 1979.
- [BPST75] A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwartz, and Y. Tyupkin. Pseudoparticles solutions of the yang-mills equations. *Phys. Lett.*, 58B:85–87, 1975.
- [Don83] Simon K. Donaldson. An application of gauge theory to four dimensional topology. *J. Diff. Geo.*, pages 279–315, 1983.
- [Don89] S. Donaldson. *Yang-Mills invariants of 4-manifolds*, pages 257–315. Cambridge University Press, 1989.
- [Fra16] G. Franchetti. Adiabatic dynamics of instantons of  $S^4$ . *Inst. für Theor. Phys.*, pages 1–10, 2016.
- [Fre82] M. Freedman. The topology of four-dimensional manifolds. *J. Diff. Geo.*, pages 357–454, 1982.
- [FU84] D.S. Freed and Karen Uhlenbeck. *Instantons and Four-Manifolds*. MSRI Publications, New York, Berlin, 1984.
- [Gui91] M. Guidry. *Gauge Fields Theories*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1991.
- [Hel62] S. Helgason. *Differential Geometry and Symmetric Spaces*. Academic Press, 1962.
- [How83] R. Howe. Very Basic Lie Algebra. *Amer. Math. Monthly*, pages 600–623, November 1983.
- [Law85] H. Blaine Lawson. The theory of gauge fields in four dimensions. Number 58 in Regional Conference Series in Mathematics. Amer. Math. Soc., 1985.
- [Lee03] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, Berlin, 2 edition, 2003.

- [Lim12a] E. L. Lima. *grupo fundamental e espaços de recobrimento*. IMPA, Brazil, 2012.
- [Lim12b] E. L. Lima. *homologia básica*. IMPA, Brazil, 2012.
- [Mat89] T. Matumoto. Three Riemannian metrics on the moduli space of BPST instantons over  $S^4$ . *Hiroshima Math. J.*, pages 221–224, 1989.
- [MM92] K.B. Marathe and G. Martucci. *The Mathematical Foundations of Gauge Theories*. North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [Nab10] G.L. Naber. *Topology, Geometry and Gauge Fields: Foundations*. Text in Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York Berlin, 2 edition, 2010.
- [Nab11] G.L. Naber. *Topology, Geometry and Gauge Fields: Interactions*. Text in Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York Berlin, 2 edition, 2011.
- [NT78] J. Nowakowski and A. Trautman. Natural connections on Stiefel bundles are sourceless gauges fields. *J. Math. Phys.*, 19(5):1100–1103, 1978.
- [Tau80] C.H. Taubes. Self-dual connections on non-self-dual 4-manifolds. *Sci. American*, pages 104–138, 1980.
- [Tra77] A. Trauman. Solutions of the Maxwell and Yang-Mills equations associated with Hopf fibrings. *Inter. J. Theo. Phys.*, 16(8):561–565, 1977.
- [Uhl82] K. Uhlenbeck. Removable singularities in Yang-Mills fields. *Commun. Math. Phys.*, pages 11–29, 1982.
- [Whi49] J.H.C. Whitehead. On simply connected 4-dimensional polyhedra. *Comment. Math. Helv.*, pages 48–92, 1949.
- [YM54] C.N. Yang and R.L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, pages 191–195, 1954.